

Nome:

B. I.: N^o de Estudante:

Curso: Turma:

Unidade Curricular: Elementos de Probabilidades e Estatística Código: 21037

Data: Ano Lectivo: 2014/15

Docente: Maria João Oliveira Classificação:

PARA A RESOLUÇÃO DO e-Fólio B, ACONSELHA-SE QUE:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores) e preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 4 grupos de questões, num total de 2 páginas e termina com a palavra FIM. As suas respostas às questões deste e-Fólio não devem ultrapassar 10 páginas.
- Escreva sempre com letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto e as suas respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em “e-Fólio B” até ao dia 25 de Maio.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores** e tem a seguinte distribuição:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
0.40	0.80	1.40	1.40

Nota: O e-Fólio é uma prova TOTALMENTE individual. A suspeita fundamentada de cópia, ou de plágio, é motivo de anulação imediata do mesmo.

1. Considere novamente o Exercício 1 do e-Fólio A sobre o concurso do Euromilhões.

Determine o espaço de resultados da experiência aleatória subjacente.

2. Num jogo de apostas disputado com um dado, um jogador ganha 20 euros se no lançamento do dado aparece o número 2, ganha 40 euros se aparece o 4, perde 30 euros se aparece o 6 e não ganha nada, nem perde nada, se no lançamento do dado aparecer qualquer uma das outras faces.

Considerando a variável aleatória que dá a quantia ganha/perdida em qualquer jogada, determine:

2.1. A função de probabilidade desta variável aleatória.

2.2. A esperança de ganho/perda de um jogador.

3. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e binomiais de parâmetro, respectivamente, (n, p) e (m, p) .

3.1. Mostre que para quaisquer dois números inteiros $M, N = 0, 1, \dots$ tem-se

$$P(X = N | X + Y = M) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{N} \binom{m}{M-N}}{\binom{m+n}{M}}, & \text{se } 0 \leq N \leq n, 0 \leq M - N \leq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- 3.2. Dadas duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 , designa-se por *valor esperado condicional de X_1 dado X_2* , $E(X_1 | X_2)$, a variável aleatória que toma o valor $E(X_1 | y)$ definido por

$$E(X_1 | y) := \sum_x x P(X_1 = x | X_2 = y).$$

No contexto do problema em análise, prove que:

3.2.1. $E(X | X + Y) = \frac{n}{m + n}(X + Y)$.

3.2.2. $E(E(X | X + Y)) = E(X)$.

4. Considere o par aleatório (X, Y) cuja função de probabilidade conjunta é dada por

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} p^{2-x-y}(1-p)^{x+y}, & x, y = 0, 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para uma certa constante $0 < p < 1$ fixa.

4.1. Calcule a variância de $X + Y$.

4.2. Defina a variável aleatória $E(X | Y)$.

4.3. Dê um exemplo de um par aleatório (X', Y') com as mesmas funções de probabilidade marginal que (X, Y) , mas tal que

$$P(X' = x, Y' = y) \neq P(X = x, Y = y).$$

FIM