

**U.C. 21037**  
**Elementos de Probabilidades e Estatística**

**11 de junho de 2018**

**- INSTRUÇÕES -**

- A prova é composta por 3 grupos de questões e contém 4 página(s). O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta).
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Todas as questões deverão ser **respondidas e justificadas** na folha de ponto, devidamente identificada. Utilize unicamente tinta azul ou preta e uma letra legível.
- É permitido o uso de máquina de calcular. Não é permitida a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. No final do enunciado encontra-se um formulário e tabela da função distribuição Normal Reduzida (normal padrão).
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se estas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

**COTAÇÃO E CRITÉRIOS DE CORREÇÃO:**

- Correção científica das respostas; escrita clara e objectiva; estrutura lógica das respostas.
- Apresentação de cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justificação cuidadosa e detalhada de todos os cálculos, raciocínios e afirmações. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- O aluno pode arbitrar um valor adequado da resposta a uma alínea que não tenha respondido, caso este seja necessário para a resolução de uma alínea posterior.
- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos 3 grupos de questões é a seguinte:

Questão	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
Cotação	1	1	1.25	1.25	3.0	2.0	1.5	1.5	1.5	1	1	1	1.5	1	0.5

- 1 Considere que lança dois dados de 6 lados (equilibrados) ao mesmo tempo.
  - 1.1 Qual a probabilidade de obter um duplo ou um 7 (na soma das pintas dos dois dados)?
  - 1.2 Qual a probabilidade de obter um 5 no primeiro dado ou um 5 no segundo dado?
  - 1.3 Qual a probabilidade de não obter um duplo ou obter um 8 (na soma das pintas dos dois dados)?
  - 1.4 Sabendo que obteve um duplo, qual a probabilidade de ser um 8 (na soma das pintas dos dois dados)?

- 2 A quantidade (em hg/km) de  $CO_2$  emitida por determinado modelo de automóveis é bem representada por uma variável aleatória real contínua,  $X$ , com função densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \vee x > 2 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- 2.1 Construa a função distribuição de  $X$ .
  - 2.2 Determine o terceiro quartil de  $X$  e interprete o valor obtido.
  - 2.3 Qual a probabilidade de um automóvel, que emite mais de 1 hg/km de  $CO_2$ , emitir mais de 1.5 hg/km?
  - 2.4 Determine o valor esperado da quantidade de  $CO_2$  emitida por um automóvel daquele modelo ( $E(X)$ ).
  - 2.5 Determine o desvio padrão de  $X$ .
- 3 Um laboratório afirma que 1% dos doentes medicados com um fármaco que comercializa apresentam determinado efeito secundário. Supondo que um médico receita esse fármaco a 8 doentes sem qualquer grau de parentesco.
    - 3.1 Determine a probabilidade de 3 doentes apresentarem esse efeito.
    - 3.2 Determine a probabilidade de pelo menos um dos doentes apresentar esse efeito.
    - 3.3 Determine a probabilidade de quando muito 2 doentes apresentarem esse efeito.
    - 3.4 Determine a probabilidade de mais de 6 doentes não apresentarem esse efeito.
    - 3.5 Determine a probabilidade de o número de doentes que não apresentam esse efeito ser superior ao número dos que o apresentam.
    - 3.6 Em quantos doentes se espera que ocorra tal efeito secundário?

## FORMULÁRIO

### Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se } P(B) > 0$$

### Teorema de Bayes

Se  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  é uma partição de  $\Omega$  (espaço de resultados), então,  $\forall B$  para o qual  $P(B) > 0$ , ter-se-á:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j)P(B|A_j)}$$

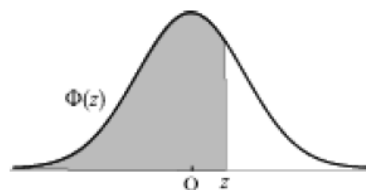
### Tabela de Distribuições

	P(X = k) ou f(x)	E(X)	V(X)
<i>Unif</i> (n)	$\frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
<i>Bin</i> (n, p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$	$np$	$np(1-p)$
<i>G</i> (p)	$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
<i>H</i> (N, M, n)	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(M, n)$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
<i>P</i> (λ)	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$	$\lambda$	$\lambda$
<i>U</i> (a, b)	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
<i>Exp</i> (λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Note que:  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

$\varepsilon$	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
$z_\varepsilon$	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

$$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon ; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon .$$