

**U.C. 21082**  
**Matemática Finita**  
**9 de julho de 2013**

**- INSTRUÇÕES -**

- O exame é composto por 8 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7 e 8 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

**CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO**

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado  $\frac{1}{3}$  de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

<b>5.</b>	<b>6.</b>	<b>7.</b>	<b>8.</b>
3	7.5	2	3.5

Nome: .....

N<sup>o</sup> de Estudante: ..... B. I. n<sup>o</sup> .....

Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

### Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando  $\times$  no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Relativamente a dois conjuntos não vazios  $X$  e  $Y$ , considere as seguintes afirmações:

- (i) O conjunto  $X$  é enumerável
- (ii) O conjunto  $Y$  é enumerável
- (iii) Existe uma aplicação sobrejectiva  $f : X \rightarrow Y$

Tem-se que:

- a) Se (ii) e (iii) são verdadeiras, então (i) é verdadeira
- b) Se (i) e (iii) são verdadeiras, então (ii) é verdadeira
- c) Se (iii) é verdadeira, então (i) e (ii) são verdadeiras
- d) Se (iii) é verdadeira, então  $\#X = \#Y$

2. O coeficiente de  $x^4$  no desenvolvimento de  $(7 - 6x)^{10}$  é igual a:

- a)  $\binom{10}{4}$
- b)  $6 \binom{10}{4}$
- c)  $(-6)^{10} \binom{10}{4}$
- d)  $(-6)^4 7^6 \binom{10}{4}$

3. Relativamente à soma

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k!} \right), \quad n \geq 3,$$

pode dizer-se à partida que...

- a) a soma é um valor não negativo
- b) a soma é um valor não positivo
- c) a soma é um valor estritamente positivo
- d) só após o cálculo da soma é que se podem tirar conclusões quanto à positividade/negatividade da soma

Nome: .....  
 N<sup>o</sup> de Estudante: ..... B. I. n<sup>o</sup> .....  
 Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

4. “A função geradora  $A(t)$  associada à sucessão  $\langle a_n \rangle$  definida por  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  e por  $2a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para  $n \geq 2$  é invertível.”

- a) Esta afirmação é desde já verdadeira
- b) Esta afirmação é desde já falsa
- c) Só pela determinação de uma forma fechada para  $A(t)$  é que se pode concluir que a afirmação é verdadeira
- d) Só pela determinação de uma forma fechada para  $A(t)$  é que se pode concluir que a afirmação é falsa

### RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. No conjunto dos números naturais  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ , considere a equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ .

5.1. Determine o número de soluções em  $\mathbb{N}$  desta equação.

5.2. Indique o número de soluções em  $\mathbb{N}$  do sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_3 = 7 \end{cases}$$

5.3. Entre as soluções da alínea anterior, em quantas aparece o número 2?

6.

6.1. Mostre que

$$\Delta \left( (-1)^{k-1} n \binom{n-2}{k-2} \right) = (-1)^k k \binom{n}{k}$$

para qualquer  $2 \leq k \leq n-1$ .

6.2. Prove que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0, \quad n > 1$$

por recurso ...

6.2.1. ... ao **método telescópico**.

6.2.2. ... ao **teorema binomial**.

6.3. Seja  $X$  um conjunto com pelos menos dois elementos. Determine o valor da soma

$$\sum_{S \subseteq X \times X} (-1)^{\#S} \#S.$$

7. Mostre, pelo **método de indução matemática**, que

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(4n^3 - n).$$

8. Considere a sucessão  $\langle a_n \rangle$  definida por

$$-a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

para  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 2$ . Determine o termo geral da sucessão por recurso...

**8.1.** ... ao **método do polinómio característico**.

**8.2.** ... ao **método das funções geradoras**.

---

Se necessitar, para qualquer exercício, pode recorrer às seguintes fórmulas gerais:

$$\bullet (1+at)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m}{n} t^n \quad \bullet \frac{1}{(1-at)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m+n-1}{n} t^n$$

**FIM**