



## Matemática Finita | 21082

### Data e hora de realização

29 de junho de 2022, às 10h00 de Portugal Continental

### Hora limite de entrega

13h00 de Portugal Continental

### Temas

Todos os temas programáticos de Matemática Finita

### Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total desta prova é de 20 valores.
2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

| 1.       | 2.       | 3.       | 4.       | 5.       | 6.       | 7.       |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1,5 val. | 1,5 val. | 1,9 val. | 2,0 val. | 3,7 val. | 2,0 val. | 7,4 val. |

### **Normas a respeitar**

Deve redigir o exame na Folha de Resolução disponibilizada e preencher todos os dados do cabeçalho.

Escreva sempre com letra legível.

As suas respostas às questões desta prova não devem ultrapassar 12 páginas A4.

Depois de ter realizado o exame produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação de Exame, segundo o exemplo apresentado: 000000exame.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo Exame até à hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira

## Enunciado

1. Considere o conjunto  $A = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$  das 26 letras do alfabeto português. Determine o número total de sequências com 5 letras que se podem formar de modo que a primeira letra e a última letra sejam vogais distintas e que as restantes letras sejam consoantes todas diferentes.
2. Entre todos os números pares entre 20000 e 80000, determine, de modo eficiente, quantos são capicuas<sup>1</sup>.
3. Mostre que

$$\left( \sum_{k=0}^n (-3)^{n-k} \binom{n}{k} \right)^4 = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k}.$$

4. Utilizando um critério de divisibilidade por 13, prove que

$$\frac{322751}{13} \in \mathbb{N}.$$

5.

- 5.1. Considere todos os divisores de 1634 e todos os divisores de 3827. De modo eficiente, determine o maior valor que simultaneamente divide 1634 e 3827.
- 5.2. Identifique os valores  $a$  para os quais existem soluções inteiras da equação

$$3827x + 1634y = a.$$

6. Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  tais que

$$\text{mdc}(a^n, b^n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

prove que  $a$  e  $b$  são números primos entre si.

---

<sup>1</sup>Uma capicua é um número que se lê de igual modo da direita para a esquerda, ou da esquerda para a direita. Por exemplo, os números 101, 111, 121 são capicuas.

7. Considere a sucessão  $\langle a_n \rangle$  definida por

$$a_n = 535a_{n-1} - 2124a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 527$ .

**7.1.** Sem determinar  $a_n$ , por recurso ao método de indução matemática mostre que  $a_n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**7.2.** Determine  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e confirme o resultado da alínea anterior.

**7.3.** Prove que cada  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é um múltiplo de 31.

**7.4.** Determine  $\text{mmc}(a_n, 17)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

FIM