Resolução exame de 2015/02/24

1.1 $x = 0.57158\ldots$ $\bar{x} = 0.572$

$\epsilon = |x - \bar{x}| = \bar{x} - x = 0.572 - 0.57158\ldots \leq 0.572 - 0.57158 = 0.00042$

$\epsilon_{LS} = 4.2 \cdot 10^{-4}$

$r = \dfrac{\epsilon}{x} \leq \dfrac{\epsilon_{LS}}{0.57158} = \dfrac{4.2 \cdot 10^{-4}}{0.57158} \simeq 7.348053 \cdot 10^{-4} < 7.35 \cdot 10^{-4}$

$r_{LS} = 7.35 \cdot 10^{-4}$

1.2 $V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\epsilon_V = |f'(r)|\, \epsilon_r$, $f'(r) = 4\pi r^2$

Para $r = 2$,

$\epsilon_V \leq 0.02 \Leftrightarrow 4\pi r^2 \epsilon_r \leq 0.02 \Leftrightarrow 16\pi\, \epsilon_r \leq 0.02 \Leftrightarrow$

$\epsilon_r \leq \dfrac{0.02}{16\pi} \simeq 3.97887 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon_{r\,max} = 3.98 \cdot 10^{-4}$ c/ 3 alg. significativos

2.1 $f(x) = \cos x - x^2$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 2x$

$f(0) = 1$, $f(1) = -0.459658$, $f'(x) < 0$ para $x \in [0\ 1]$

Como para $x \in [0\ 1]$, $f(x)$ é contínua, $f(0)\,f(1) < 0$ e $f'(x) < 0$, existe uma única raiz real para a equação $f(x) = 0$.

2.2 $f(x) = \cos x - x^2$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 2x$, $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $x_0 = 1$

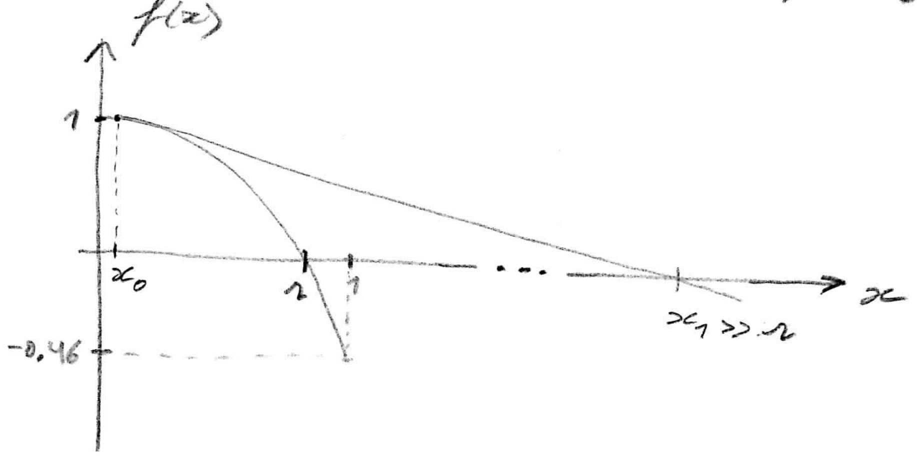
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1	-0.4597	-2.84147
1	0.838218	-0.033821	-2.41989
2	0.824242	$-2.61 \cdot 10^{-4}$	-2.38252

$r \simeq \bar{x} = x_2 = 0.824242$

2.3 $\epsilon = |r - x_k| \simeq |x_{k+1} - x_k|$

$\epsilon = |r - x_2| = |x_3 - x_2| = \left| \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \right| \simeq 1.1 \cdot 10^{-4}$

2.4 Dado que $f'(0.001) \simeq 0$, significa que a reta tangente a $f(x)$ em $x_0 = 0.001$ é quase horizontal e a sua interseção com o eixo dos x vai ocorrer para um valor elevado de x_1 muito maior que a raiz r, pelo que $x_0 = 0.001$ não é uma boa escolha.



3.1 $Ax = b$, Matriz aumentada $[A \,|\, b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -10 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 8 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 = l_2 - l_1/2 \\ l_3 = l_3 + l_1/2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 = l_3 - 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{array}\right]$$

Por substituição inversa,

$x_3 = -3$

$x_2 = 2$

$x_1 = (-10 - 4(-3))/2 = 1$

4.1 $p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$

c/ $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.6$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.4)(x-0.6)}{-0.2 \cdot (-0.4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0.2)(x-0.6)}{0.2 \cdot (-0.2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{0.4 \cdot 0.2}$$

$$p_2(x) = \frac{0.940\,067}{0.08}(x-0.4)(x-0.6) - \frac{0.761\,067}{0.04}(x-0.2)(x-0.6)$$

$$+ \frac{0.465\,336}{0.08}(x-0.2)(x-0.4)$$

4.2

$$f(x) - p_2(x) = R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

c/ $\xi \in [0.2 \quad 0.6]$

Dado que a expressão de $f(x)$ não é conhecida, tem de se obter o erro pelas diferenças divididas

$$R_2(x) = f[x_0, x_1, x_2, x] (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Para $x = 0.5$ vem

$$R_2(0.5) = f[0.2, 0.4, 0.6, 0.5] (0.5-0.2)(0.5-0.4)(0.5-0.6)$$

$$= -0.003 \, f[0.2, 0.4, 0.6, 0.5]$$

Como $f(0.5)$ é desconhecido, admitindo que as diferenças divididas de ordem 3 não variam muito e dado que se sabe $f(0.3)$,

$$f[0.2, 0.4, 0.6, 0.5] \simeq f[0.2, 0.4, 0.6, 0.3]$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
0	0.2	0.940 067			
			-0.74731		
1	0.3	0.865 336		-1.4772	
			-1.04275		0.0607
2	0.4	0.761 061		-1.45292	
			-1.478625		
3	0.6	0.465 336			

$$R_2(0.5) \simeq -0.003 \cdot 0.0607 = -1.82 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon(0.5) = |R_2(0.5)| \simeq 1.82 \cdot 10^{-4}$$