Actividade Formativa 2

Enunciado

1. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a seguinte fracção é irredutível

$$\frac{21n+4}{14n+3}.$$

2. Dados dois números inteiros a e b distintos, por recurso ao método de indução matemática mostre que

$$\frac{b^n - a^n}{b-a} = \sum_{i=0}^{n-1} b^i a^{n-i-1}, \quad n \geq 1.$$

3. Considere dois números $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$.

3.1. Prove que:

3.1.1. Se $m \mid (a-b)$, então $m \mid (a^k - b^k)$ para todo o natural k.

3.1.2. Se p é um polinómio com coeficientes inteiros, então $(a-b)|(p(a)-p(b))$.

3.1.3. Se k é um número natural ímpar, então $(a+b) \mid (a^k + b^k)$.

3.2. Será que o resultado da alínea 3.1.3 ainda é verdadeiro para k um número natural par? Justifique.

4. Considere dois números naturais a e b não nulos.

4.1. Prove que os quocientes $\frac{a}{\mathrm{mdc}(a,b)}$ e $\frac{b}{\mathrm{mdc}(a,b)}$ são primos entre si.

4.2. Supondo que $a+b=90$ e $\mathrm{mdc}(a,b)=15$, determine todos os possíveis valores para a e b.

5. Dados dois números primos p e q distintos e a um múltiplo de p, mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se

5.1. $\mathrm{mmc}(p+nq, q) - \mathrm{mmc}(p,q) = nq^2$

5.2. $\mathrm{mmc}(p,a) \mid \mathrm{mmc}(p+na, a)$

6. Considere o número 2160.

6.1. Quantos divisores próprios positivos possui o número 2160?

6.2. Entre **todos** os divisores de 2160 determine:

6.2.1. Quantos são ímpares;

6.2.2. Quantos são múltiplos de 3;

6.2.3. Quantos são quadrados perfeitos[1].

7. Dados 2160 e 525, por recurso à factorização em números primos determine $\text{mdc}(2160, 525)$ e confira o resultado por recurso ao algoritmo de Euclides. Calcule $\text{mmc}(2160, 525)$.

8. Sejam p e n dois números naturais tais que $1 < p < n^2$. Mostre que se p não é múltiplo de nenhum número natural menor que n, então p é um número primo.

9. Dado um número p primo, prove que:

9.1. $p \mid \binom{p}{k}$ para qualquer $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

9.2. $p \nmid \text{mmc}(1, 2, \ldots, p-1)$.

9.3. $p \mid (n^p - n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

10. Prove os seguintes critérios de divisibilidade:

10.1. $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 13 se, e só se,

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1)_{10} - 9a_0$$

é divisível por 13.

10.2. $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 37 se, e só se,

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1)_{10} - 11a_0$$

é divisível por 37.

Sugestão: Veja a resolução do Exercício 4 sobre Congruências.

11. Por recurso a argumentos de divisibilidade, determine o resto da divisão de 71392 por 13.

[1] Um número inteiro positivo a diz-se um quadrado perfeito se $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$.