E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio

Investigação Operacional | 21076

Nome: João Manuel Pacheco Seco Marques

Nº de Estudante: 2403882

Curso: Licenciatura Eng Informatica **Turma:** **Turma 4**

Data: 07/04/2026 **Ano Letivo:** 2025/26

Docentes: Patrícia Engrácia, Elsa Negas e Joana Russo

Resolução Exercício 1:

Sejam x_A, x_B e x_C as quantidades de caixas de sabonetes dos tipos A, B e C a produzir semanalmente.

A maximização do lucro total semanal é expressa pela função:

Maximizar: $F = 12x_A + 9x_B + 8x_C$

Restrições de Produção
Os tempos de processamento são por unidade de sabonete. Cada caixa contém 12 unidades. A disponibilidade é dada em horas semanais, convertidas para minutos para uniformidade com os tempos de processamento

Formula para calculo: $Y\ \text{min/unidade} \times 12\ \text{unidades/caixa} = Z\ \text{min/caixa}$

Preparação da base - Disponibilidade: 40 horas = 2400 minutos.

- Tempos por caixa:
  - Sabonete A : 144 min/caixa
  - Sabonete B : 120 min/caixa
  - Sabonete C : 96 min/caixa
- Restrição: $144x_A + 120x_B + 96x_C \leq 2400$

Incorporação de ingredientes - Semanalmente ha disponibilidade de 80h (4800 minutos) para a incorporação de ingredientes

- Tempos por caixa:
  - Sabonete A : 180 min/caixa
  - Sabonete B : 144 min/caixa
  - Sabonete C : 96 min/caixa
- Restrição: $180x_A + 144x_B + 96x_C \leq 4800$

Acabamento final - Ha disponibilidade de 24h (1440 minutos) semanalmente na secção de acabamento final

- Tempos por caixa:
  - Sabonete A : 72 min/caixa
  - Sabonete B : 48 min/caixa
  - Sabonete C : 24 min/caixa
- Restrição: $72x_A + 48x_B + 24x_C \leq 1440$

Marketing - Máximo de 16 caixas vendidas do tipo C por semana: $x_C \leq 16$

Limite de Embalagens - Máximo de 50 caixas por semana: $x_A + x_B + x_C \leq 50$

Restrição de não-negatividade - Como não é possível produzir uma quantidade negativa de caixas, impõe-se a condição de não-negatividade: $x_A, x_B, x_C \geq 0$

Formulação Completa

Maximizar: $F = 12x_A + 9x_B + 8x_C$

Sujeito a:

$144x_A + 120x_B + 96x_C \leq 2400$ (Preparação da base)
$180x_A + 144x_B + 96x_C \leq 4800$ (Incorporação de ingredientes)
$72x_A + 48x_B + 24x_C \leq 1440$ (Acabamento final)
$x_C \leq 16$ (Marketing)
$x_A + x_B + x_C \leq 50$ (Limite de Embalagens)
$x_A, x_B, x_C \geq 0$ (Não-negatividade)

<u>Resolução Exercício 2:</u>

Conversão das restrições do modelo de Programação Linear nas respetivas equações das retas fronteira, operando a simplificação dos denominadores para representação no plano:

$r_1\!: \; X + \frac{4}{3}Y = 4 \Rightarrow 3X + 4Y = 12$

$r_2\!: \; 2X + Y = 2$

$r_3\!: \; \frac{3}{2}X + 2Y = 3 \Rightarrow 3X + 4Y = 6$

$r_4\!: \; X = 2$

$r_5\!: \; X = 0$

$r_6\!: \; Y = 0$

Determinação algébrica exata dos vértices extremos da região admissível, através da intersecção das restrições ativas.

Intersecção entre $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_5}$: $\begin{cases} 3X + 4Y = 12 \\ X \qquad\quad = 0 \end{cases}$

$3(0) + 4Y = 12 \Rightarrow 4Y = 12 \Rightarrow Y = 3$

Vértice A: (0 , 3)

Intersecção entre $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_4}$: $\begin{cases} 3X + 4Y = 12 \\ X \qquad\quad = 2 \end{cases}$

$3(2) + 4Y = 12 \Rightarrow 6 + 4Y = 12 \Rightarrow 4Y = 6 \Rightarrow Y = 1.5$

Vértice B: (2 , 1.5)

Intersecção entre r_3 e r_4: $\begin{cases} 3X + 4Y = 6 \\ X \quad\quad = \ 2 \end{cases}$

$3(2) + 4Y = 6 \Rightarrow 6 + 4Y = 6 \Rightarrow 4Y = 0 \Rightarrow Y = 0$

Vértice C: (2 , 0)

Intersecção entre r_2 e r_3: $\begin{cases} 2X + Y = 2 \\ 3X + 4Y = 6 \end{cases}$

Isolando Y na primeira equação: Y = 2 – 2X

Substituindo na segunda equação:
$3X + 4(2 - 2X) = 3X + 8 - 8X = 6$
$-5X = -2 \Rightarrow X = \dfrac{2}{5} = 0.4$

Substituindo o valor de X :

$Y = 2 - 2(0.4) = 2 - 0.8 = 1.2$

Vértice D: (0.4 , 1.2)

Intersecção entre r_2 e r_5: $\begin{cases} 2X + Y = 2 \\ \mathrm{X} = 0 \end{cases}$

$2(0) + Y = 2 \Rightarrow Y = 2$

Vértice E: (0 , 2)

Avaliação da função objetivo F = 3X + 4Y em cada vértice do polígono admissível:

$F_A(\,0\,,3\,) \quad\;\; = 3(0) + 4(3) = 0 + 12 = 12$
$F_B(\,2\,,1.5\,) \;\; = 3(2) + 4(1.5) = 6 + 6 = 12$
$F_C(\,2\,,0\,) \quad\;\; = 3(2) + 4(0) = 6 + 0 = 6$
$F_D(\,0.4\,,1.2\,) = 3(0.4) + 4(1.2) = 1.2 + 4.8 = 6$
$F_E(\,0\,,2\,) \quad\;\; = 3(0) + 4(2) = 0 + 8 = 8$

O valor ótimo (máximo) absoluto extraído é F* = 12, sendo verificado em dois vértices adjacentes (A e B).

Análise da unicidade da solução ótima através da verificação de paralelismo (comparação de declives):

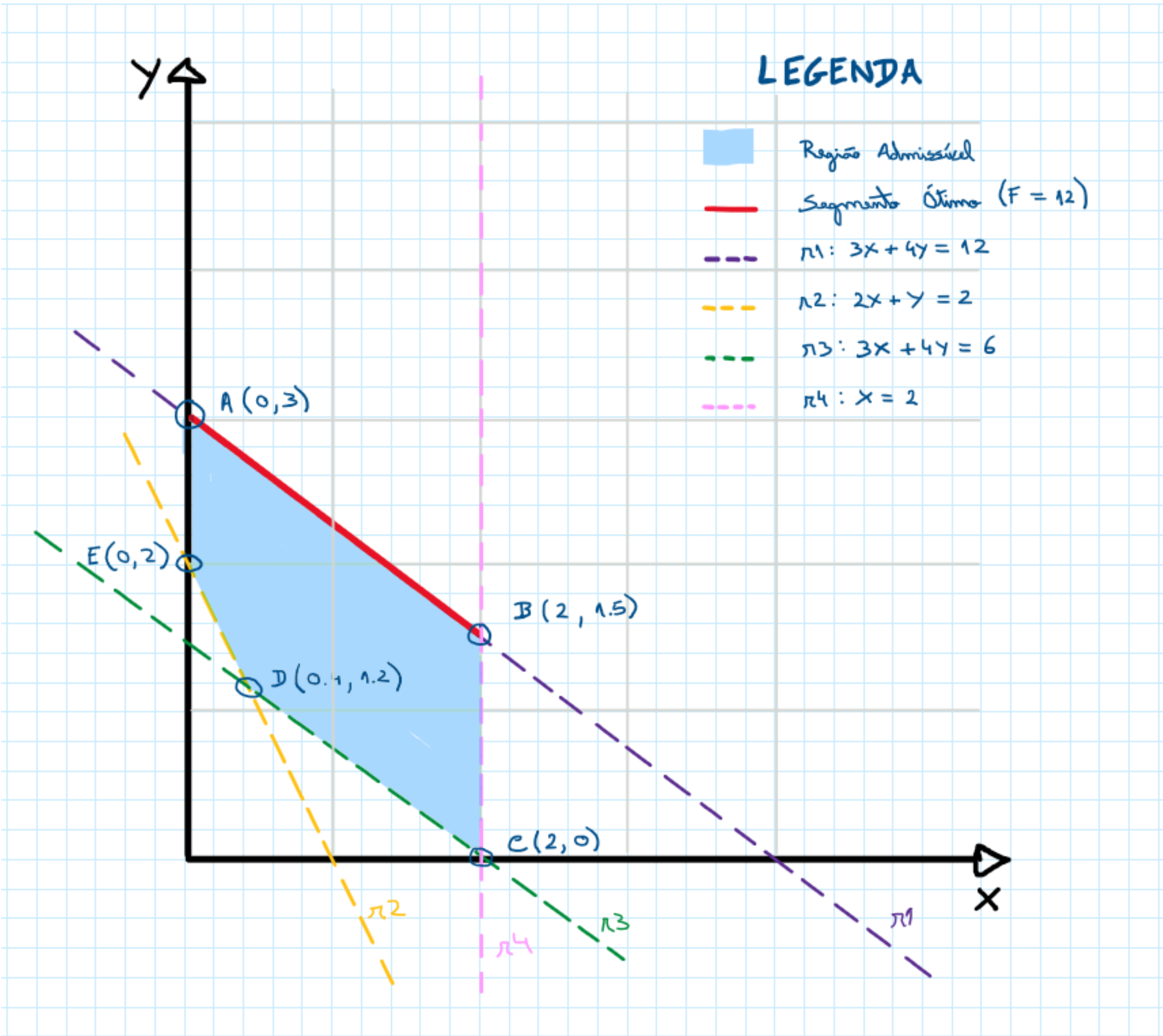
Isolamento da variável Y na função objetivo para determinar o declive das curvas de nível:
$F = 3X + 4Y \Rightarrow 4Y = -3X + F \Rightarrow Y = -\dfrac{3}{4}X + \dfrac{F}{4}$
Declive da função objetivo: $m_F = -\frac{3}{4}$

Isolamento da variável Y na equação da reta de restrição ativa r_1
(segmento $\overline{AB}$): $X + \frac{4}{3}Y = 4 \Rightarrow \frac{4}{3}Y = -X + 4 \Rightarrow Y = -\frac{3}{4}X + 3$
Declive da reta restrição r_1: $m_{r1} = -\frac{3}{4}$

Comprova-se a igualdade rigorosa entre o declive da função objetivo e o declive da reta da restrição limitante ($m_F = m_{r1}$). Devido a este paralelismo estrito, a função objetivo sobrepõe-se à fronteira da região admissível no segmento que une os vértices A e B.

A solução ótima não é única, estando configurada uma situação de soluções múltiplas (infinitas soluções ótimas). O conjunto destas soluções é formalizado matematicamente através da combinação linear convexa dos vértices extremos A e B:
(X*, Y*) = $\lambda(0,3) + (1-\lambda)(2,1.5), \quad \lambda \in [0,1]$

Gráfico da Região Admissível



Resolução Exercício 3:

Converte-se o problema de Programação Linear para a forma standard através da introdução de variáveis de folga (F_2 , F_3), excesso (F_1) e uma variável artificial (α). Aplica-se o Método das Penalidades, atribuindo um custo muito negativo (- M, com M → ∞) à variável artificial na função objetivo.

Maximizar: $F = 7X + 8Y + 3Z + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 - M\alpha$
Sujeito a:

$$X + 3Y + Z - F_1 + \alpha = 40$$
$$2X + 2Y + Z + F_2 = 40$$
$$X + 2Y + Z + F_3 = 30$$
$$X, Y, Z, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0$$

Isolando α na primeira restrição: $\alpha = 40 - X - 3Y - Z + F_1$

Substituindo na função objetivo para anular o coeficiente da variável básica artificial:
$F = 7X + 8Y + 3Z - M(40 - X - 3Y - Z + F_1)$

$F - (7 + M)X - (8 + 3M)Y - (3 + M)Z + MF_1 = -40M$

Construção do Quadro Inicial (Quadro 0):

Base	**X**	**Y**	**Z**	**F1**	**F2**	**F3**	α	**TI**
α	1	3	1	- 1	0	0	1	40
F2	2	2	1	0	1	0	0	40
F3	1	2	1	0	0	1	0	30
F	- 7 - M	- 8 - 3M	- 3 - M	M	0	0	0	- 40M

A variável Y entra na base por apresentar o coeficiente mais negativo na linha F (- 8 - 3M).
Cálculo dos rácios:
α: $40 / 3 \approx 13.33$
F_2 : $40/2 = 20$
F_3: $30/2 = 15$

A variável α sai da base por apresentar o menor rácio positivo. O elemento pivô é 3. Como α é artificial e abandonou a base, a sua coluna é eliminada nas iterações subsequentes.

Quadro 1:

Base	**X**	**Y**	**Z**	**F1**	**F2**	**F3**	**TI**
Y	1/3	1	1/3	- 1/3	0	0	40/3
F2	4/3	0	1/3	2/3	1	0	40/3
F3	1/3	0	1/3	2/3	0	1	10/3
F	- 13/3	0	- 1/3	- 8/3	0	0	320/3

A variável X entra na base (coeficiente mais negativo na linha F: -13/3).
Cálculo dos rácios:
Y: (40/3) / (1/3) = 40
F_2: $(40/3)/(4/3) = 10$
F_3 : $(10/3)/(1/3) = 10$

Registа-se um empate entre F_2 e F_3. Seleciona-se F_2 para sair da base.
O elemento pivô é 4/3.

Quadro 2:

Base	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
Y	0	1	1/4	- 1/2	-1/4	0	10
X	1	0	1/4	1/2	3/4	0	10
F3	0	0	1/4	1/2	-1/4	1	0
F	0	0	3/4	- 1/2	13/4	0	150

A variável F_1 entra na base (único coeficiente negativo na linha F: -1/2).
Cálculo dos rácios:
Y: Ignorado (coeficiente negativo -1/2).
X: 10 / (1/2) = 20
F_3: 0 / (1/2) = 0

Trata-se de uma solução degenerada. A variável F_3 sai da base pelo menor rácio não-negativo (0). O elemento pivô é 1/2.

Quadro 3:

Base	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
Y	0	1	1/2	0	-1/2	1	10
X	1	0	0	0	1	-1	10
F1	0	0	1/2	1	-1/2	2	0
F	0	0	1	0	3	1	150

Verifica-se a inexistência de coeficientes negativos na linha F.
A solução atual é ótima e admissível.

Avaliando a linha F, os coeficientes das variáveis não-básicas (Z , F_2 , F_3) assumem os valores estritamente positivos de 1, 3 e 1, respetivamente.
A ausência de valor nulo associado a variáveis não-básicas prova matematicamente que a solução ótima é única.

$(X^*, Y^*, Z^*) = (10,10,0)$
$F^* = 150$