

U.C. 21037

Elementos de Probabilidades e Estatística

5 de setembro de 2017

-- INSTRUÇÕES --

- O estudante deverá responder à totalidade da prova na folha de ponto, preenchendo o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique, no momento da entrega, se as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se para efeitos de classificação toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta) e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta nas suas respostas.
- É permitida a utilização de máquina de calcular científica. Não é permitida a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. Em Anexo encontra-se um formulário e tabela da função distribuição Normal Reduzida (normal padrão).

Critérios de Avaliação e Cotação

- Para além da correção científica das respostas, são considerados a clareza e a objetividade da resposta, a sua estrutura lógica e a notação utilizada.
- Justifique todas as afirmações e cálculos que realizar e verifique sempre se os conteúdos da resposta se adequam ao solicitado pela questão. A apresentação de cálculos e de resultados numéricos sem justificação dos mesmos será penalizada na avaliação.
- Se precisar de um resultado de uma alínea anterior para resolver outra alínea, as suposições que necessite fazer (caso façam sentido), serão levadas em linha de conta aquando da correção.
- A cotação global do exame é de 20 valores, tendo a seguinte distribuição, por 3 grupos.

1.	2.	3.
6 val.	7 val.	7 val.

Duração máxima da prova: 2 horas e 30 minutos.

1. Uma Seguradora Multinacional é especializada no ramo de acidentes de trabalho e divide as empresas, suas clientes, em três grandes categorias: L, M e H, de acordo com o maior ou menor risco de apresentar acidentes com origem na atividade laboral. A carteira de clientes da Seguradora está distribuída da seguinte forma: 20% das empresas seguradas pertencem à classe H (maior risco), 32% pertencem à classe L (menor risco) e as restantes estão na categoria M, de risco moderado.

A seguradora possui registo sobre a existência (ou não) de um plano para redução do risco de acidentes de trabalho, implementado internamente pelas suas clientes. Sabe-se que 60% das empresas da categoria H implementaram um plano deste tipo, o mesmo se verificando em 35% das empresas da categoria M e em 20% da categoria L.

a) (2.0 v) Seleciona-se ao acaso uma apólice de seguros de entre as clientes da Seguradora. Determine a probabilidade de ser de uma empresa que implementou um plano de redução do risco de acidentes de trabalho. Justifique a sua resposta.

b) (2.0 v) A Seguradora selecionou aleatoriamente duas das suas clientes com o objetivo de enviar um técnico para visitar as instalações. Verificou-se que as duas empresas selecionadas não têm um plano de redução de risco implementado. Qual é a probabilidade de, no mínimo, uma das duas apólices pertencer à categoria H (alto risco)? Assuma-se que o número de clientes da Seguradora é elevado. Justifique.

c) (2.0 v) A Seguradora Multinacional tem no nosso país 5 clientes da categoria H, 10 da categoria M e 5 da categoria L. A seguradora convida aleatoriamente 3 gestores de empresas clientes do nosso país para uma sessão de esclarecimento a realizar na sede da Multinacional. Determine a probabilidade de haver nesse grupo menos de 2 gestores de empresa da categoria M (risco moderado). Justifique.

2. Considere o par aleatório (X, Y) com função de probabilidade conjunta indicada no quadro a seguir:

$y_j \setminus x_i$	$x=0$	$x=1$	$x=2$
$y=1$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
$y=2$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

a) (2.0 v) Determine as funções de probabilidade condicionadas de Y, para $x=0$ e $x=1$ e ainda $E[Y|X=1]$. Justifique.

b) (1.0 v) Podemos afirmar que X e Y são variáveis independentes? Justifique a sua afirmação.

c) (2.5 v) Determine a função de probabilidade conjunta do par aleatório discreto (Z, W) onde $Z=X+Y$ e $W=Y-X$.

d) (1.5 v) Considere que $P(Y=1)$ (ou $f_Y(1)$) é a probabilidade de tirar um berlinde amarelo ao acaso de uma caixa com berlindes de várias cores. Suponha que se fazem tiragens com reposição, de um berlinde de cada vez. Qual a probabilidade de serem necessárias menos de 5 tiragens até sair um berlinde amarelo pela primeira vez? Justifique.

3. A variável aleatória X representa a duração de um filme publicitário em minutos, e tem função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2}, & 3 < x < 5 \\ 0, & \text{outras } x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

- a) (1.5 v) Determine a probabilidade de um filme publicitário ter uma duração inferior a 4 minutos. Justifique.
- b) (2.0 v) Determine o valor médio e desvio-padrão da duração do filme publicitário. Justifique.
- c) (1.5 v) Determine o 1º Quartil da distribuição. Justifique.
- d) (2.0 v) O preço da exibição de um filme publicitário na TV é uma variável aleatória W com distribuição normal de média $\mu=150$ unidades monetárias (u.m.) e variância $\sigma^2 = 900$ (u.m.)². Três marcas de iogurte distintas firmaram contrato com a TV para publicitar o seu produto. Calcule a probabilidade do montante global cobrado pela TV às três marcas ser superior a 600 u.m. Indique os pressupostos que assume e justifique os resultados.

Formulário

Probabilidade condicional e teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, P(B) > 0; P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \times P(A_i)}{P(B)}; P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Função de probabilidade e função de distribuição (var. univariadas)

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j < x} f_X(x_j); \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad E[X^k] = \mu^k = \sum x_i^k f_X(x_i)$$

$$E[X^k] = \mu^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx \quad E[KX] = K E[X]; \quad \text{Var}[X] = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{Var}[KX] = K^2 \text{Var}[X]$$

Variáveis aleatórias bidimensionais (X,Y)

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j); \quad f_{X|Y}(x_i | y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

$$f_X(x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \quad f_Y(y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$\text{Var}[X \pm Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \pm 2 \text{Cov}[X, Y] \quad \text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j f_{X,Y}(x_i, y_j) \quad E[X|Y = y_j] = \sum_i x_i f_{X|Y}(x_i | y_j) \quad \rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}}$$

Modelo	Expressão da Função de probabilidade	$\mu = E[X]$	$\sigma^2 = \text{Var}[X]$
Bernoulli	$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$ $x=0,1$	p	$p(1-p)$
Binomial	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Uniforme	$P(X = x) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Geométrica	$P(X = x) = (1-p)^{x-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n \frac{M}{N} = n \times p$	$n \frac{M}{N} \frac{N-M}{N} \frac{N-n}{N-1}$

Modelo	Expressões das funções de:		$\mu = E[X]$	$\sigma^2 = \text{Var}[X]$
	densidade	distribuição		
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in [a, b]$	$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$		μ	σ^2

Valores da Função Distribuição Normal Padrão ou Reduzida (z positivo)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998
4.1	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99999	0.99999
4.2	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.3	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.4	0.99999	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Nota: $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
F(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995

FIM