E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: Elementos de Álgebra

CÓDIGO: 21133

DOCENTE: Gilda Ferreira

A preencher pelo estudante

NOME: Joana Cristina Alves Quitério Russo

N.º DE ESTUDANTE: 1601289

CURSO: Matemática e Aplicações

DATA DE ENTREGA: 11 de novembro de 2018

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1. **Determine todos os seus subgrupos.**

Trata-se de um grupo cíclico de ordem 4 e tem apenas um subgrupo próprio {0, 2}.

2. **Sejam G = < a > um grupo cíclico de ordem 18 e H = < a^4 >.**

a) Escreva H em extensão.

$$< a^4 > = \{(a^4)^n \mid n \in Z\} = \{n,\ a^2, a^4\}$$

b) Determine todos os geradores (distintos) de H.

Os divisores de 18 são 1, 2, 3, 6, 9 e 18. Retirando os múltiplos, ficamos com 13 geradores distintos.

3. No grupo simétrico S_3 considere $S' = \{e, a, b\}$ com

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Justifique que S' é subgrupo de S_3.

O grupo S_n é o grupo de todas as permutações do conjunto {1, 2, …, n}. S_3 é o menor grupo não abeliano e possui 3!=6 elementos.

Os elementos de S_3 podem ser descritos da seguinte forma:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$$

Sendo ij a imagem do inteiro j da linha de cima pela bijeção de f. Os elementos de S_3 são:

$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Verifica-se que $y^{-1} = y$ para todo $y \in S'$, donde $xy^{-1} \in S'$ para todo $x, y \in S'$. Logo S' é um subgrupo.

Podemos também ver que $S_3 = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ e $S' = \{f_0, f_4, f_5\}$ logo S' está contido em S_3 e é seu subgrupo.

b) Determine o índice de S' em S_3.

S' é subgrupo do grupo S_3 porque é finito e fechado para a operação. Como S' tem ordem 3, então tem índice 4 em S_3.

c) Sendo $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, resolva a equação $b^2xa^{-1} = c$.

$$aa^{-1} = e = a^{-1}a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pode concluir-se que $a^{-1} = b$. Neste sentido a equação $b^2xa^{-1} = c \leftrightarrow b^2xb = c \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4.

a) Seja A um conjunto não vazio e * uma operação binária em A comutativa mas não associativa. Mostre que existem elementos $a_1, a_2, a_3 \in A$ tais que $(a_1 * a_2) * a_3 \neq (a_3 * a_2) * a_1$.

Seja A um conjunto qualquer de aplicações, fechado para a multiplicação. Então, A é associativo, mas pode não ser comutativo. Se A for o conjunto das aplicações do conjunto {Lisboa, Porto, Coimbra} e consideremos a operação x*y definida pela tabela:

x \ y	Lisboa	Porto	Coimbra
Lisboa	Lisboa	Coimbra	Porto
Porto	Coimbra	Porto	Lisboa
Coimbra	Porto	Lisboa	Coimbra

Podemos observar que o conjunto A é associativo, porque:

(Lisboa * Porto) = (Porto * Lisboa) = Coimbra

(Coimbra * Porto) = (Porto * Coimbra) = Lisboa

(Coimbra * Lisboa) = (Lisboa * Coimbra) = Porto

Em relação à associatividade, por exemplo:

(Lisboa * Porto) * Coimbra = Coimbra * Coimbra = Coimbra

Lisboa * (Porto * Coimbra) = Lisboa * Lisboa = Lisboa

Coimbra é diferente de Lisboa, logo * é uma operação binária em A comutativa, mas não associativa.

b) Seja $f: G \rightarrow H$ homomorfismo de grupos em que G é comutativo e f é função sobrejetiva. Mostre que H é comutativo.

Intuitivamente um homomorfismo é uma função que transforma um grupo G num grupo H.

Seja G e H dois grupos. Um homomorfismo de G para H é uma função $f: G \rightarrow H$ tal que $\forall x, y \in G, f(x * y) = f(x) * f(y)$

Sendo G comutativo, quer dizer que é um grupo $(G,*)$ em que $a * b = b * a$ para quaisquer a e b em G.

Então $f(ab) = f(ba) \rightarrow f(a)f(b) = f(b)f(a)$ ou seja, para todo $a, b \in G$ vem que $f(a)f(b) = f(b)f(a)$.

Sendo f bijetiva, concluímos que H é comutativo.