UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21030

Elementos de Análise Infinitesimal I

13 de Julho de 2018

- INSTRUÇÕES -

- O Exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas, ou respostas apresentadas em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por 2 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Justifique todas as suas respostas, apresentando todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Este exame tem a cotação total de **20 valores** distribuídos do seguinte modo:

	Grupo I		**Grupo II**				**Grupo III**	
Questões	1	2	1	2	3	4	1	2
Cotações	3,0	3,0	2,5	2,0	3,0	2,0	2,0	2,5
Totais	**6,0**		**9,5**				**4,5**	

GRUPO I (6 valores)

(3 val.) **1.** Prove que a sucessão x_n, tal que $x_1 = 0$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, é convergente e calcule o seu limite.

Resolução:

Comecemos por notar que x_n é uma sucessão de termos não negativos ($x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$), o que facilmente se verifica por indução.

Com efeito, $x_1 = 0 \geq 0$, e na hipótese de indução, $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} \geq \sqrt{0+6} = \sqrt{6} \geq 0 \ ,$$

tendo em conta que $f(x) = \sqrt{x+6}$, $x \geq -6$, é uma função crescente.

Deste modo, se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, então $x \geq 0$. Por outro lado, deverá ter-se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = x$, pois x_{n+1} é subsucessão de x_n e, por Teorema, se uma sucessão é convergente, então todas as suas subsucessões convergem para o mesmo limite.

Calculando o limite das sucessões membro da relação de recorrência, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, obtém-se

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} x_n + 6} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{x+6} \ ,$$

tendo em conta que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x_n + 6} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + 6}$, pois $f(x) = \sqrt{x+6}$, $x \geq -6$, é uma função contínua.

Resolvendo a última equação em ordem a x, obtém-se

$$\begin{aligned} x = \sqrt{x+6} \ &\Rightarrow \ \left(x^2 = x + 6\right) \ \wedge \ x \geq 0 \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \ \wedge \ x \geq 0 \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ x = \frac{1 \pm 5}{2} \ \wedge \ x \geq 0 \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ x = 3 \end{aligned}$$

Logo, o único candidato a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ é 3.

Provemos então que x_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sucessão convergente para 3.

Para o efeito, mostremos, por indução, que:

i) x_n é uma sucessão crescente: $\big($isto é, $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}\big)$

Para $n = 1$:

$x_2 = \sqrt{x_1 + 6} = \sqrt{6} \geq x_1 = 0$ (está verificado).

Para $n > 1$:

Admita-se, para hipótese de indução, que $x_{n+1} \geq x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Então,

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} + 6} \ \geq \ \sqrt{x_n + 6} = x_{n+1} \ ,$$

tendo em conta que $f(x) = \sqrt{x+6}$, $x \geq -6$, é função crescente.
Está deste modo verificado, por indução, que a sucessão x_n, $n \in \mathbb{N}$, é crescente.

ii) $x_n \leq 3, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$:

$x_1 = 0 \leq 3$ (está verificado).

Para $n > 1$:

Admita-se, para hipótese de indução, que $x_n \leq 3$, $n \in \mathbb{N}$.
Então,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} \leq \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3 \ ,$$

tendo em conta que $f(x) = \sqrt{x+6}$, $x \geq -6$, é função crescente.
Está deste modo verificado, por indução, que $x_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por i) e ii), provou-se que x_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sucessão monótona crescente e limitada superiormente, pelo que é convergente, de acordo com Teorema, tendo-se então $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 3$ (de acordo com o que vimos).

(3 val.) **2.** Determine, justificando, qual a natureza (divergente, absolutamente convergente ou simplesmente convergente) da série seguinte:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{n!} \right)$$

Resolução:

Comecemos por analisar a série dos módulos.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{n!} \right) \right| \ &= \ \sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n| \cdot \left| \frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{n!} \right| \ = \\ &= \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{n!} \right) \ = \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \right) + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) \qquad (*)$$

tendo em conta que $|(-1)^n| = 1,\ \log(n+1) > 0$ e $n! > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\log(n+1) < n+1, \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, é divergente, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente $\big($por ser uma série de Dirichelet da forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha \leq 1\big)$.

Logo, pelo 1º Critério de Comparação, concluímos, de acordo com a desigualdade acima, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ é divergente, o que é suficiente para concluir que a soma $(*)$ é divergente, e portanto, que a série dos módulos diverge.

Nota: Apesar de não ser necessário na argumentação acima, observemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente, de acordo com o Critério D'Alembert, já que $\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \dfrac{1}{n+1} \to 0 < 1$.

Analisemos agora a série dada (sem módulo), que é alternada.

Para o efeito, consideremos $b_n = \dfrac{1}{\log(n+1)} + \dfrac{1}{n!}\ ,\ n \in \mathbb{N}$.

Notemos que:

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n+1)} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{\log(+\infty)} + \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0.$$

ii) b_n é uma sucessão decrescente: $\big($isto é, $b_{n+1} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}\big)$

Como a função log é crescente, temos

$$\log(n+2) \geq \log(n+1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\log(n+2)} \leq \frac{1}{\log(n+1)}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado,

$$(n+1)! \geq n! \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\frac{1}{\log(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{n!} \quad \Leftrightarrow \quad b_{n+1} \le b_n \ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por i) e ii), concluímos então, de acordo com o Teorema de Leibniz, que a série dada é convergente, e por isso simplesmente convergente (já que série dos módulos diverge, como vimos).

GRUPO II (9,5 valores)

(2,5 val.) **1.** Considere uma função f, diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e f' limitada em $\mathbb{R}$. Prove que a função g, dada por

$$g(x) = \Big[\sin\big(f^3(x)+\pi\big)\Big] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Comecemos por notar que g é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, pois envolve operações de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, onde a função f, diferenciável em $\mathbb{R}$ por hipótese, intervém. De facto, g é o produto de funções diferenciáveis (uma que resulta da composição de função sin, com a potência cúbica de f adicionada da constante π, e a outra, uma função exponencial de base positiva, com função expoente f).

Usando o resultado do exercício 5 da Atividade Formativa 2, podemos provar que g é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, mostrando que g' é limitada em $\mathbb{R}$.

Estabeleça-se a expressão de g' em $\mathbb{R}$, encarando a função g como um quociente.

Com efeito,

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{\sin\big(f^3(x)+\pi\big)}{2^{f(x)}}\right)' = \\
&= \frac{\cos\big(f^3(x)+\pi\big)\cdot\big(f^3(x)+\pi\big)'\cdot 2^{f(x)} - \sin\big(f^3(x)+\pi\big)\cdot f'(x)\cdot 2^{f(x)}\cdot\log 2}{\big(2^{f(x)}\big)^2} = \\
&= \frac{2^{f(x)}\cdot\Big[\cos\big(f^3(x)+\pi\big)\cdot 3f^2(x)\cdot f'(x) - \sin\big(f^3(x)+\pi\big)\cdot f'(x)\cdot\log 2\Big]}{2^{f(x)}\cdot 2^{f(x)}} = \\
&= f'(x)\cdot\frac{\cos\big(f^3(x)+\pi\big)\cdot 3f^2(x) - \sin\big(f^3(x)+\pi\big)\cdot\log 2}{2^{f(x)}}
\end{aligned}$$

Deste modo, tendo em conta que $2^{f(x)} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|g'(x)| &= |f'(x)| \cdot \frac{\left|\cos\left(f^3(x)+\pi\right)\cdot 3f^2(x) - \sin\left(f^3(x)+\pi\right)\cdot \log 2\right|}{2^{f(x)}} \leq \\
&\leq |f'(x)| \cdot \frac{\left|\cos\left(f^3(x)+\pi\right)\cdot 3f^2(x)\right| + \left|\sin\left(f^3(x)+\pi\right)\cdot \log 2\right|}{2^{f(x)}} = \\
&= |f'(x)| \cdot \frac{\left|\cos\left(f^3(x)+\pi\right)\right|\cdot 3f^2(x) + \left|\sin\left(f^3(x)+\pi\right)\right|\cdot \log 2}{2^{f(x)}} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

vendo acima que se aplicou a desigualdade triangular, $|X \pm Y| \leq |X|+|Y|$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}$, que $|f^2(x)| = f^2(x)$, pois $f^2(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, e que $|\log 2| = \log 2$, pois $\log 2 > \log 1 = 0$ (já que a função log é crescente).

Ora, como f' é limitada, por hipótese, então

$$\exists M > 0 : \ |f'(x)| \leq M \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\left|\cos\left(f^3(x)+\pi\right)\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left|\sin\left(f^3(x)+\pi\right)\right| \leq 1 \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, de acordo com $(*)$, obtemos

$$|g'(x)| \ \leq \ M \cdot \left(3 \cdot \frac{f^2(x)}{2^{f(x)}} + \log 2 \cdot \frac{1}{2^{f(x)}}\right) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Notemos agora que

$$\frac{f^2(x)}{2^{f(x)}} < 1 \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

pois, sendo $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por hipótese, então $2^{f(x)}$ cresce mais rapidamente que $f^2(x)$, e portanto, $f^2(x) < 2^{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Por outro lado,

$$f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2^{f(x)} \ > \ 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^{f(x)}} < \frac{1}{2^0} = 1 \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

tendo em conta que a função exponencial de base 2 é crescente (pois $2 > 1$).

Logo, tendo em conta $(**)$, obtemos

$$|g'(x)| \ \leq \ M \cdot (3 + \log 2) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

ou seja, g' é limitada em $\mathbb{R}$, e por isso g é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, como queríamos provar.

(2 val.) **2.** Mostre que a função $h(x) = -\,x\,e^{ax^2} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, tem 1 e 1 só zero em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Notemos que h é uma função diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}$, por ser a diferença de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$. A 1ª função resultante do produto da função polinomial, $-x$, com a função exponencial, e^{ax^2}, ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$, e a 2ª função que é constante.

Por h ser uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, também concluímos que h é uma função contínua em $\mathbb{R}$, de acordo com Teorema.

Comecemos por argumentar que h só poderá ter no máximo um zero em $\mathbb{R}$. Tal pode ser feito de duas formas possíveis, a partir do conhecimento da expressão da função derivada de h e da análise do seu sinal em $\mathbb{R}$.

Com efeito,

$$h'(x) = -e^{ax^2} - x \cdot a \cdot 2x \cdot e^{ax^2} = (\underbrace{-1 - 2ax^2}_{<0}) \cdot \underbrace{e^{ax^2}}_{>0} < 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}, a > 0 \ ,$$

notando acima que $ax^2 \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e, por outro lado, que e^{ax^2} é uma exponencial de base positiva.

Nestas condições, h é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, e como h é contínua em $\mathbb{R}$, então o seu gráfico só pode intersetar o eixo dos xx's no máximo uma vez.

Outra forma de argumentarmos a conclusão anterior seria admitir a existência de mais do que um zero para h. Sob esta hipótese, existiriam pelo menos dois zeros reais distintos c_1 e c_2 para h. Uma vez que h é contínua em $[c_1, c_2]$ e diferenciável em $]c_1, c_2[$, por o ser em $\mathbb{R}$, o Teorema de Rolle asseguraria a existência de um zero $c_3 \in]c_1, c_2[$ para h'. Mas, tal é absurdo, já que de acordo com a expressão de h' obtida acima, $h'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Verificado que h tem no máximo um zero real, mostremos no que se segue que h possui um zero, e que portanto ele será único. Para o efeito, basta estabelecer um intervalo real no qual ele se localize.

Notemos que

$$h(-1) = e^a - 1 > e^0 - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad h(0) = -1 \ ,$$

tendo em conta que $a > 0$, por hipótese, e que a função exponencial de base $e > 1$, é estritamente crescente.

Como h é contínua no intervalo $[-1, 0]$, por o ser em $\mathbb{R}$, e por termos $h(-1) \cdot h(0) < 0$, então, o Corolário do Teorema de Bolzano assegura que h possui um zero no intervalo $[-1, 0]$, que será por isso único, de acordo com o argumentado acima.

(3 val.) **3.** Determine as dimensões dos catetos de um triângulo retângulo de área 2, para as quais a hipotenusa do triângulo é mínima.

Resolução:

Consideremos um triângulo retângulo, com catetos de dimensões x e y, e hipotenusa de dimensão h.

Como, por hipótese, a área, A, do triângulo retângulo é 2, então

$$A = \frac{xy}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{4}{x}.$$

Por outro lado, a expressão para o comprimento da hipotenusa, h, pode ser obtida em função de x e y, com base no Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \text{pois } h > 0.$$

Como $y = \frac{4}{x}$, podemos expressar h somente em termos da variável x, por meio de uma função H, dada por:

$$H(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} = \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x > 0\ ,$$

notando que $x > 0$, pois x denota a dimensão de um cateto e não se pode anular, já que x^2 figura em denominador acima.

Ora, H é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, tendo-se

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left[\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)' \cdot \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}-1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2x + \frac{0 - 16 \cdot 2x}{x^4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \\ &= \frac{x - \frac{16}{x^3}}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x^4 - 16}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} \end{aligned}$$

Como $x^3\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} > 0$ e $x^2 + 4 > 0$, $\forall x > 0$, o sinal de H' é determinado pelo sinal de $x^2 - 4$.

Com efeito, uma vez que o gráfico de $y = x^2 - 4$ é o de uma parábola com a concavidade voltada para cima e zeros em -2 e 2 $\big($pois $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\big)$, o quadro de variação do sinal de H' para $x > 0$, é dado por:

x	0		2	
$H'(x)$	n.d.	-	0	+
$H(x)$	n.d.	$\searrow$	Min	$\nearrow$

onde n.d. significa que as funções envolvidas não estão definidas para o valor de x associado, neste caso o 0.

Logo, concluímos que a hipotenusa é mínima, quando $x = y = 2$, isto é, quando o triângulo é retângulo isósceles, com catetos de dimensão 2.

(2 val.) **4.** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{1/x^2}-1\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}$

Resolução:

Calculando o limite diretamente, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{1/x^2}-1\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)} = \frac{\infty\cdot\left(e^{0}-1\right)}{\sin 0} = \frac{\infty\cdot 0}{0}$$

Para levantarmos a indeterminação anterior, há que reescrever a expressão objeto de limite, por forma a serem aplicados limites notáveis.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{1/x^2}-1\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{x}}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\times\frac{x}{\pi}\times x\times\frac{e^{1/x^2}-1}{\frac{1}{x^2}}\times\frac{1}{x^2}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\times\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{x}}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right)\times\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{\frac{1}{x^2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\times 1\times 1 = \frac{1}{\pi}\ ,
\end{aligned}$$

tendo em conta que foram aplicados acima os limites notáveis:

$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$, com $y = \dfrac{1}{x}$, $x\to+\infty$, e $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y} = 1$, com $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x\to+\infty$.

GRUPO III (4,5 valores)

(4,5 val.) **1.** Calcule:

(2 val.) **a)** $\displaystyle\int \sin(2x)\,\sin^2 x\; dx$

Resolução:

Ora,

$$\int \sin(2x)\,\sin^2 x\; dx = \int 2\,\sin x\,\cos x\,\sin^2 x\; dx = 2\int \cos x\,\sin^3 x\; dx$$

Tomemos $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nestas condições, temos $f'(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, e podemos escrever que

$$\int \sin(2x)\,\sin^2 x\,dx = 2\int f'(x)\cdot f^3(x)\,dx = 2\times\frac{f^4(x)}{4} + C =$$

$$= 2\times\frac{\sin^4(x)}{4} + C = \frac{\sin^4(x)}{2} + C\ ,\quad C\in\mathbb{R}.$$

(2,5 val.) **b)** $\displaystyle\int \frac{2\,e^x}{4+e^{2x}}\,dx$

Resolução:

Tomemos $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nestas condições, $f'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e podemos escrever que

$$\int \frac{2\,e^x}{4+e^{2x}}\,dx = \int \frac{2\,f'(x)}{4+f^2(x)}\,dx = \int \frac{2\,f'(x)}{4\left(1+\frac{f^2(x)}{4}\right)}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\,f'(x)}{1+\left(\frac{f(x)}{2}\right)^2}\,dx = \arctan\left(\frac{f(x)}{2}\right) + C =$$

$$= \arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) + C\ ,\quad C\in\mathbb{R}.$$

FIM