

Física Geral 21048

Instruções para elaboração deste e-Fólio

Documento de texto, .DOC, .PDF ou .PS; fonte 11 ou 12; espaçamento livre; máximo 6 páginas. Pode incluir desenhos, várias cores e pode inclusive juntar elementos aos desenhos do próprio e-Fólio. Para incluir fórmulas pode usar o editor de fórmulas do seu processador de texto ou gerá-las à parte.

Entregar até às 23:55 h do dia 25 de janeiro, por via da plataforma.

Critérios de correção: (para cada questão as percentagens oscilarão nos intervalos indicados)

20 ± 10% Rigor científico da colocação do problema em equação.

40 ± 10% Rigor técnico do código desenvolvido e dos comentários (código não comentário = zero).

40 ± 10% Rigor dos cálculos, expressão e interpretação corretas dos resultados.

Este e-Fólio tem a cotação máxima de 4 valores.

Nos problemas abaixo dê as suas respostas em unidades SI.

1. (“E depois do Heun...”) Um corpo de massa $m = 1,00$ kg segue à rapidez inicial de $0,04329455$ m/s quando fica sujeito a uma força dependente da velocidade e tempo, atuando no sentido e direção do movimento, de magnitude $F = [v - \text{sen}(2t)]/(2 - t)$ e com o argumento do seno em *radianos*. A 2ª lei de Newton prevê que a velocidade do corpo seja regida por

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v - \text{sen}(2t)}{2 - t}$$

Integre esta equação diferencial a partir do ponto inicial $(t, v) = (-2; 0,04329455)$, até perto de $t = 2$ e com passo à sua escolha, pelos métodos de

a) (0,5 val) Euler.

b) (1,0 val) Heun/Previsor-Corretor.

c) (1,5 val) Runge-Kutta de 3ª ordem clássico (fórmulas abaixo).

d) (1,0 val) Compare os resultados obtidos para cada método com a solução analítica do problema,

$v(t) = \frac{\cos^2(t)}{2-t}$, mediante o cálculo do erro absoluto para cada iteração de cada método (fórmulas abaixo), e subseqüente cálculo do erro absoluto médio. Comente a qualidade da solução dos três métodos implementados, em particular perto do ponto $t = 2$.

Na sua submissão deste trabalho deve incluir **dois** ficheiros:

1. Um ficheiro de texto (.DOC/.PDF/.PS, etc.) com a resolução do problema, sob a forma de uma tabela de valores para cada iteração, tal como indicado abaixo. Se incluir gráficos da solução, devem ser colocados neste ficheiro.
2. O código-fonte da sua implementação, devidamente comentado. Qualquer linguagem de programação será aceite, mas o estudante deve indicar qual a que usou, que versão e sob que sistema operativo trabalhou.

(v.s.f.f.)

Formulário:

Para resolver a ED

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v)$$

Aplicar os métodos de

Euler	Heun/Previsor-Corretor/RK2	Runge-Kutta de 3ª ordem
$v_{i+1} = v_i + k_1 h$ com $k_1 = f(t_i, v_i)$	$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h$ com $k_1 = f(t_i, v_i)$ $k_2 = f(t_i + h, v_i + k_1 h)$	$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$ com $k_1 = f(t_i, v_i)$ $k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, v_i + k_1 \frac{h}{2}\right)$ $k_3 = f(t_i + h, v_i - k_1 h + 2k_2 h)$

Tabela de resultados:

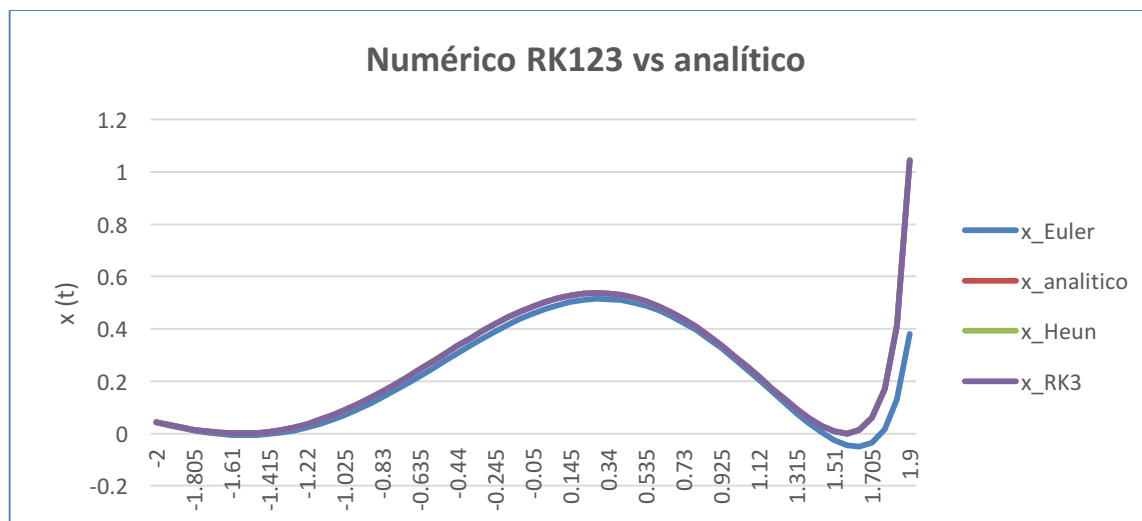
Utilize 5+ casas decimais nos cálculos e no erro relativo.

Use de imaginação se a largura da página não chegar para escrever tudo numa linha...

t	v_{Euler}	k_1	v_{Heun}	k_1	k_2	v_{RK3}	k_1	k_2	k_2	$v_{\text{analit.}}$	Err/Euler	Err/Heun	Err/RK3
-2	0,043294547	-0,178376987	0,043294547	-0,178376987	-0,160643715	0,043294547	-0,178376987	-0,169982507	-0,160359445	0,043294547	0	0	0
-1,9334	0,03141464	-0,160643715	0,032005158	-0,160493585	-0,138799938	0,03198735	-0,160498113	-0,150091872	-0,138446157	0,031987351	0,000572711	1,7807E-05	1,31671E-09
-1,8668	0,020715769	-0,138955239	0,022038684	-0,138613118	-0,113170902	0,022004989	-0,138621831	-0,126301439	-0,112748082	0,022004992	0,001289223	3,3692E-05	2,4913E-09
-1,8002	0,01146135	-0,113525015	0,013654276	-0,112947959	-0,084034802	0,013606999	-0,1129604	-0,098856796	-0,083544526	0,013607003	0,002145653	4,72731E-05	3,49552E-09
-1,7336	0,003900584	-0,084632445	0,00709475	-0,083776926	-0,051733614	0,007036553	-0,083792513	-0,068068771	-0,051178619	0,007036557	0,003135973	5,81928E-05	4,30296E-09
...													
...													
...													
1,7296	-0,02222863	1,072728702	0,093293136	1,499954166	3,085782375	0,092482653	1,496956817	2,18117125	3,528016212	0,092482712	0,114711342	0,000810423	5,99253E-08
1,7962	0,049215102	2,379330062	0,245998162	3,344899545	7,435422705	0,245103857	3,340511392	4,991034615	9,029177346	0,245103923	0,195888821	0,00089424	6,61229E-08
1,8628	0,207678484	5,532434453	0,604982893	8,428239187	25,82983277	0,604009339	8,421143307	14,34170552	36,97958838	0,604009411	0,396330927	0,000973483	7,19824E-08
1,9294	0,576138618	17,47055508	1,745776689	34,03766657	1191,058617	1,744729185	34,0228294	96,0769548	3256,952078	1,744729263	1,168590644	0,001047427	7,745E-08
1,996	1,739677587	622,8066929	42,54148293	10823,25803	-12207,71516	42,54036745	10822,97916	-13779,50029	40141,64507	42,54036753	40,80068994	0,0011154	8,24759E-08
										Média →	0,717365752	0,000359615	2,65911E-08

Erro absoluto:

$$\text{Err} = |v_{\text{analit.}} - v_{\text{numer.}}|$$



(a,b,c) Para passo $h = 0,0666$ temos o resultado da tabela acima e correspondente gráfico.

(d) Com erros médios de 0,717365752 (Euler) 0,000359615 (Heun) e $2,65911 \times 10^{-8}$ (RK3) torna-se claro que Euler é consideravelmente pior que os outros dois e efetivamente só pode ser usado para se ter uma primeira ideia do perfil da solução. Heun é satisfatório mas RK3 é claramente superior.

A instabilidade numérica perto de $t = 2$ é indicativa da presença de uma *assíntota vertical* no resultado, o que era de esperar, dada a forma da força, que tem $t - 2$ no denominador. É precisamente perto deste tipo de fenómeno que os métodos de ordem 3+ se evidenciam como sendo superiores aos de ordens inferior, i.e. RK1 (Euler) ou RK2 (Heun).

Em Física, a assíntotas verticais dá-se o nome de *singularidade* e a sua aparição tem interpretações diversas. Em Cosmologia, há singularidades no centro de um buraco negro. Em Mecânica Estatística as singularidades indicam transições de fase (p.ex. passagem de estado sólido ao estado líquido). Em Mecânica Clássica sinalizam ressonâncias do sistema. Singularidades levam ao aparecimento de infinitos e fisicamente significam que o modelo, ou teoria, que estamos a assumir para descrever a realidade perde o seu regime de validade e deve ser substituído por outro modelo/teoria mais preciso.