UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21002
Álgebra Linear I

13 de novembro de 2019

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) **deverão ser respondidas no enunciado**.
- As questões dos grupos **II** a **VI** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	**III**	**IV**	**V**	**VI**
2.0 val.	4.0 val.	4.0 val.	4.0 val.	2.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $\mathcal{T} = ((1,2,1),\ (1,-1,-2),\ (2,1,-1))$ uma sequência de vetores de $\mathbb{R}^3$. Então:

☐ **a)** $\mathcal{T}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, diferente da base canónica.

☐ **b)** $\mathcal{T}$ é um conjunto gerador, mas não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

☐ **c)** $\mathcal{T}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

☐ **d)** $\dim \mathcal{T} < 3$.

Questão 2

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(a,b,c) = (a+b, b+c)$. Considerando a base canónica de $\mathbb{R}^3$ na partida e a base canónica de $\mathbb{R}^2$ na chegada, a matriz que representa f é:

☐ a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Questão 3

Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, e seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Então a solução do sistema $AX = B$ é:

☐ a) $X = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top$.

☐ b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^\top$.

☐ c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$.

☐ d) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Seja $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz $A^3 + A^2 + A = I_4$, onde I_4 designa a matriz identidade de ordem 4. Então:

☐ a) $\det A = 0$.	☐ c) $\det A \neq 1$.
☐ b) $\det A^3 = \det A^2$.	☐ d) $\det(A^2 + A + I_4) \neq 0$.

Questões de desenvolvimento

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

> Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que
$\operatorname{Im} f = \left\langle (1,0,0,1)\ , (0,1,1,0)\ , (0,1,2,0) \right\rangle$ e $\dim \operatorname{Nuc} f = 2$.

b) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então 0 é valor próprio de B se e só se $\det B = 0$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 8y - 4z = 0 \\ 2x + 11y + 5z = 9 \\ 4x + 18y + 3z = 11 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Verifique que as (eventuais) soluções que obteve satisfazem de facto o sistema.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

IV. Seja $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ a aplicação linear definida por $T(x) = 1$ e $T(1) = x$.

a) Determine a matriz A que representa T na base $(x, 1)$ no espaço de partida e no espaço de chegada.

b) Determine o núcleo de T.

c) Determine a imagem de T.

d) Verifique que o Teorema da Dimensão é satisfeito.

V. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Mostre justificadamente que os valores próprios da matriz A são *apenas* 0 e 4.

b) Mostre que o vetor $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 0.

c) Determine uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio 4.

d) Indique justificadamente se a matriz A é diagonalizável.

VI. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrizes que verificam

$$AB = \begin{bmatrix} a & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 2 & b \\ -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine os possíveis valores de a e b.

Sugestão: Recorde que $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.

FIM