Elementos de Análise Infinitesimal I | 21030

Proposta de Resolução Sumária

1.1. Case Base: $\mathbf{n = 1}$. Tem-se

$$u_1 = 2$$

que, sendo maior ou igual a 2, prova o caso base: $\frac{u_1}{1!} = u_1 = 2 \geq 2$.

Hipótese de indução: Fixado um $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que para esse n tem-se

$$\frac{u_n}{n!} \geq 2$$

Tese de indução:

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \geq 2$$

(Aqui, o n é o mesmo que surge na hipótese de indução.)

Passo de indução: Por forma a provar a tese de indução, comece-se por notar que ela é equivalente a

$$\frac{(n^2+1)u_n}{(n+1)!} \geq 2.$$

Tem-se então

$$\frac{(n^2+1)u_n}{(n+1)!} = \frac{n^2+1}{n+1} \cdot \frac{u_n}{n!} \geq 2\frac{n^2+1}{n+1},$$

onde na igualdade anterior se utilizou o facto de $(n+1)! = (n+1)n!$ e, na desigualdade anterior, se utilizou a hipótese de indução. Como

$$n \geq 1 \implies n^2 \geq n \implies n^2+1 \geq n+1 \implies \frac{n^2+1}{n+1} \geq 1,$$

conclui-se que

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n^2+1)u_n}{(n+1)!} \geq 2\frac{n^2+1}{n+1} \geq 2,$$

o que prova a tese de indução.

Conclusão: Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{n!} \geq 2$.

1.2. Pela alínea anterior resulta, em particular, que todos os termos da sucessão são positivos: $u_n \geq 2n! \geq 2 > 0$. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$u_{n+1} = \underbrace{(n^2+1)}_{\geq 1} u_n \geq u_n,$$

o que prova que (u_n) é uma sucessão crescente.

1.3. Observe-se que

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2 \\
u_2 &= (1^2+1)u_1 = 4 \\
u_3 &= (2^2+1)u_2 = 20 \\
u_4 &= (3^2+1)u_3 = 200
\end{aligned}$$

Como $20 = u_3 < 150 < u_4 = 200$ e a sucessão (u_n) é crescente (o que significa que todos os restantes termos da sucessão são superiores a u_4), conclui-se que não existe nenhum índice n para o qual $u_n = 150$.

1.4. Não existe limite uma vez que a sucessão não é limitada. Isto, porque, dado $L > 0$ qualquer, existe sempre um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0! > \frac{L}{2}$. Consequentemente, $u_{n_0} \geq 2n_0! > L$, provando que (u_n) não é uma sucessão limitada.

2.1. Independentemente do valor de α tem-se

$$\left| (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por comparação com a série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \tag{1}$$

tem-se

$$\frac{\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}$$

com

$$\lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1} = 1.$$

Assim, pela alínea 1 do Critério de Comparação (Teorema 6, pág. 595), isto significa que as séries (1) e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}$ são da mesma natureza, tendo-se então a convergência absoluta da série dada se, e só se, a série de Dirichlet (1) convergir. Tal acontece se, e somente se, $\alpha - 1 > 1$ (cf. pág. 595).

2.2. Note-se que

$$-\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} \leq (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} \leq \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

pelo que decorre do princípio dos limites enquadrados, ou do Teorema 3 do Apêndice A.1, que o termo geral da série converge para 0 e, e só se,

$$\lim_n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} = 0.$$

Tal acontece, se, e somente se, $\alpha > 1$:

$$\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} = \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} \cdot \frac{n}{n+1} \implies \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} = \lim_n \frac{n}{(n+1)^{\alpha}},$$

em que

- $\alpha = 1$:
$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1;$$
- $0 < \alpha < 1$: $\frac{n}{(n+1)^{\alpha}} \geq \frac{n}{n+1}$ e $\lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, pelo que
$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} \neq 0;$$
- $\alpha \leq 0$: $\frac{n}{(n+1)^{\alpha}} = n(n+1)^{-\alpha}$ com $-\alpha \geq 0$, pelo que
$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} = \lim_n n(n+1)^{-\alpha} = +\infty;$$

- $\alpha > 1$: $0 < \frac{n}{(n+1)^\alpha} < \frac{n+1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$, em que $\lim_n \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 0$ por $\alpha - 1 > 0$. Logo, pelo princípio dos limites enquadrados,

$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^\alpha} = 0.$$

Como consequência, pelo Teorema 4, alínea 2, pág. 579 tem-se que a série diverge para $\alpha \leq 1$.