Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 1 a 8 de Abril de 2024

Enunciado

1. (1.0 val.) Uma empresa artesanal de produção de artigos de decoração pretende planear a atividade do seu departamento de produção, nomeadamente a secção de acabamentos, por ser a de maior mão de obra intensiva e, portanto, mais difícil de avaliar em termos de rentabilidade. O seu objetivo prioritário é saber qual o nível de atividade ótimo que lhe permita maximizar o lucro.

O departamento de acabamentos tem-se dedicado nos últimos tempos ao polimento envernizamento e secagem de dois tipos de objetos de decoração: candeeiros de parede e molduras para fotografias. A empresa tem vendido tudo o que produz e não se espera que venha a surgir qualquer diminuição drástica do nível de procura.

Cada candeeiro proporciona uma margem de 80 unidades monetárias (u.m.) e cada moldura rende 60 u.m.

A fase de polimento, atividade manual, apresenta uma limitação 30 horas-homem por dia. Um candeeiro necessita, em média, de 5 horas de trabalho, enquanto que as molduras necessitam apenas de 3 horas.

A atividade de envernizamento requer cerca de 2 cl de verniz para cada candeeiro e mais 1 cl para cada moldura. A empresa conta gastar uma lata de 24 cl por dia.

A secagem é efetuada num forno com capacidade para secar uma peça de cada vez e que trabalha 18 horas por dia. Os candeeiros necessitam de 1 hora enquanto que as molduras necessitam de 3 horas.

Sabendo que o objetivo da análise se prende com a maximização do lucro, formalize o problema, indicando as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições do problema.

Resolução:

Variáveis de decisão:
X: quantidade de candeeiros produzidos diariamente;
Y: quantidade de molduras produzidas diariamente.

Função objetivo, a maximizar (lucro):

$$F(X,Y) = 80X + 60Y$$

Restrições:
$5X + 3Y \leq 30$ "A fase de polimento, atividade manual, apresenta uma limitação 30 horas-homem por dia. Um candeeiro necessita, em média, de 5 horas de trabalho, enquanto que as molduras necessitam apenas de 3 horas."
$2X + Y \leq 24$ "A atividade de envernizamento requer cerca de 2 cl de verniz para cada candeeiro e mais 1 cl para cada moldura. A empresa conta gastar uma lata de 24 cl por dia."
$X + 3Y \leq 18$ "A secagem é efetuada num forno com capacidade para secar uma peça de cada vez e que trabalha 18 horas por dia. Os candeeiros necessitam de 1 hora enquanto que as molduras necessitam de 3 horas."
$X, Y \geq 0$ condições de não negatividade.

Assim, o problema formaliza-se como:

$$\max F = 80X + 60Y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 5X + 3Y \leq 30 \\ 2X + Y \geq 24 \\ X + 3Y \leq 18 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

2. Considere o seguinte problema de programação linear:

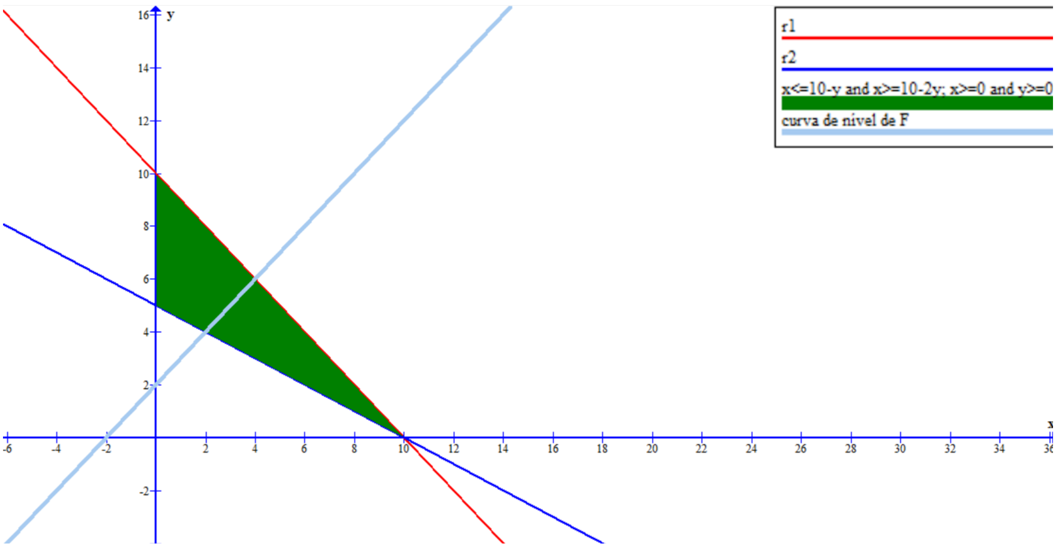
$$\max F = X - Y$$

sujeito a

$$\begin{cases} X \leq 10 - Y \\ X \geq 10 - 2Y \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

(a) (0.8 val.) Desenhe o polígono admissível, resolva o problema pelo método gráfico e interprete a solução ótima (variáveis de decisão, variáveis de folga e o valor da função objetivo).

Resolução:
A reta $X = 10 - Y \;\Leftrightarrow\; Y = 10 - X$ passa nos pontos $(0, 10)$ e $(10, 0)$.
A reta $X = 10 - 2Y \;\Leftrightarrow\; Y = -\frac{1}{2}X + 5$ passa nos pontos $(0, 5)$ e $(10, 0)$.



As retas de nível da função F são dadas pelas retas $X - Y = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$Y = X - z.$$

Assim, o valor da função F diminui à medida que aumenta o valor de z. Na figura acima, pode ver-se uma curva de nível (reta azul claro). De acordo com as retas de nível à medida que F aumenta, a recta desloca-se para baixo e podemos ver que o ponto ótimo é o ponto que está na intersecção das retas r_1 e r_2:

$$\begin{cases} X + Y = 10 \\ X + 2Y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 10 - Y \\ 10 - Y + 2Y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 10 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$(X^*, Y^*) = (10, 0)$$

com $F^* = F(X^*, Y^*) = 10$.

Ambas as variáveis de folga são nulas, pois o ponto ótimo encontra-se na intersecção das duas retas, tendo esgotado os recursos correspondentes às restrições.

(b) (0.2 val.) Indique uma função objetivo de modo a que a houvesse multiplicidade de soluções.

Resolução:
Para haver múltiplas soluções a função objetivo teria de ter curvas de nível paralelas a uma das retas das restrições. Por exemplo, F poderia ter curvas de nível paralelas à reta $Y = 10 - X \Leftrightarrow X + Y = 10$. Assim, a função objetivo poderia ser

$$\max F = X + Y \ .$$

Todos os pontos da reta $Y = 10-X$ com $X \in [0, 10]$ seriam pontos ótimos, neste caso.

(c) (0.2 val.) Escreva o problema na forma standard.

Resolução:

$$\max F = X - Y + 0F_1 + 0F_2$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} X + Y + F_1 = 10 \\ X + 2Y - F_2 = 10 \\ X, Y, F_1, F_2 \geq 0 \end{cases}$$

(d) (0.8 val.) Resolva o problema pelo método das penalidades. **Resolução:**

$$\max F = X - Y + 0F_1 + 0F_2 - M\alpha$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} X + Y + F_1 = 10 \\ X + 2Y - F_2 + \alpha = 10 \\ X, Y, F_1, F_2, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

	X	Y	F_1	F_2	α44	TI	Δ	
F_1	1	1	1	0	0	10		
	1	2	0	-1	1	10		
F	-1	1	0	0	M	0	$l_3 - Ml_2$	
F_1	1	1	1	0	0	10	10	$l_1 - \frac{1}{2}l_2$
α	1	2	0	-1	1	10	5	$\leftarrow$ $\frac{1}{2}l_2$
F	$-1-M$	$-1-2M$	0	M	0	$-10M$		$l_3 - \frac{1}{2}(1-2M)l_2$
		$\uparrow$						
F_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	10	$\leftarrow$ $2l_1$
Y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	10	$l_2 - l_1$
F	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+M$	-5		$l_3 + 3l_1$
	$\uparrow$							
X	1	0	2	1	-1	10		
Y	0	1	-1	-1	1	0		
F	0	0	3	2	$-2+M$	10		

Neste ponto, o algoritmo para, uma vez que já não existem valores negativos na linha do F (ignora-se a coluna da variável artificial).

Logo, concluímos que este problema tem solução dada por $(X^*, Y^*) = (10, 0)$ com $F^* = 10$.

(e) (0.8 val.) Resolva o problema pelo método das duas fases.

Resolução:
Método das duas fases

1.ª fase:

$$\min A = \alpha \Leftrightarrow \max -A = -\alpha$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} X + Y + F_1 = 10 \\ X + 2Y - F_2 + \alpha = 10 \\ X, Y, F_1, F_2, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

	X	Y	F_1	F_2	α	TI	Δ	
F_1	1	1	1	0	0	10		
	1	2	0	-1	1	10		
$-A$	0	0	0	0	1	0		$l_3 - l_2$
F_1	1	1	1	0	0	10	10	$l_1 - \frac{1}{2}l_2$
α	1	2	0	-1	1	10	5	$\leftarrow$ $\frac{1}{2}l_2$
$-A$	-1	-2	0	1	0	-10		$l_3 + l_2$
		$\uparrow$						
F_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5		
Y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5		
$-A$	0	0	0	0	1	0		

2.ª fase:

	X	Y	F_1	F_2	TI	Δ	
F_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	5		
	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	5		
F	-1	1	0	0	0		$l_3 - l_2$
F_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	5	10	$\leftarrow$ $2l_1$
Y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	5	10	$l_2 - l_1$
F	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	-5		$l_3 + 3l_1$
	$\uparrow$						
X	1	0	2	1	10		
Y	0	1	-1	-1	0		
F	0	0	3	2	10		

Neste ponto, o algoritmo para, uma vez que já não existem valores negativos na linha do F.

Logo, concluímos que este problema tem solução única (todas as soluções não básicas têm coeficiente não nulo na linha do F) dada por $(X^*, Y^*) = (10, 0)$ com $F^* = 10$.

(f) (0.2 val.) Interprete a solução ótima (variáveis de decisão, variáveis de folga e o valor da função objetivo) e indique se se trata de uma solução única ou uma solução múltipla.

Resolução:
A solução ótima é encontrada quando $X = 10$ e $Y = 0$, sendo o valor máximo de F 10. As variáveis de folga são nulas, pelo que as quantidades associadas às restrições são totalmente esgotadas, não havendo folgas.

A solução é única pois todas as soluções não básicas têm coeficiente não nulo na linha do F.

FIM