FÍSICA GERAL | 21048

RESOLUÇÃO

1. The Armaggeddon Man

[Versão (muito) simplificada de um problema de mecânica celeste.]

O telescópio sentinela da cintura de asteroides detetou a colisão entre dois destes corpos celestes. Após o choque, um deles, do tamanho da Ilha da Madeira, alterou a sua órbita e dirige-se agora em linha reta para a Terra, em rota de colisão! A gravidade da Terra puxa o asteroide de acordo com a 2ª lei de Newton e a lei da gravitação universal, cuja combinação culmina na equação diferencial de 2ª ordem

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_T}{r^2} \quad ; \quad G = 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{kg^2}} \quad ; \quad M_T = 5{,}97\times10^{24}\,\mathrm{kg}$$

com r a distância entre o asteroide e a Terra, G a constante de gravitação universal e M_T a massa da Terra.

No instante da deteção, o asteroide está a 250 milhões de km da Terra ($r_0 = 2{,}5\times10^{11}\,\mathrm{m}$) e viaja em direção a esta com velocidade de -40 km/s ($v_0 = -40\,000\,\mathrm{m/s}$), em que o sinal menos indica sentido em direção à Terra.

Questão: (4 val) calcule o tempo que a humanidade tem para encontrar uma solução para o problema!

O sistema a resolver é

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{GM_T}{r^2} \end{cases}$$

Implementando o algoritmo de Heun para sistemas de equações diferenciais temos, para os valores do enunciado,

t (s)	r (m)	v (m/s)	k1r	k1v	k2r	k2v	dias
0	2,5E+11	-40000	-40000	-6,37118E-09	-40000,00055	-6,55106E-09	0
86400	2,46544E+11	-40000,00056	-40000,00056	-6,55106E-09	-40000,00112	-6,73865E-09	1
172800	2,43088E+11	-40000,00113	-40000,00113	-6,73865E-09	-40000,00171	-6,93443E-09	2
259200	2,39632E+11	-40000,00172	-40000,00172	-6,93443E-09	-40000,00232	-7,13886E-09	3
345600	2,36176E+11	-40000,00233	-40000,00233	-7,13886E-09	-40000,00295	-7,35246E-09	4
432000	2,3272E+11	-40000,00296	-40000,00296	-7,35246E-09	-40000,00359	-7,5758E-09	5
518400	2,29264E+11	-40000,0036	-40000,0036	-7,5758E-09	-40000,00426	-7,80947E-09	6
604800	2,25808E+11	-40000,00427	-40000,00427	-7,80947E-09	-40000,00494	-8,05412E-09	7
691200	2,22352E+11	-40000,00495	-40000,00495	-8,05412E-09	-40000,00565	-8,31045E-09	8
777600	2,18896E+11	-40000,00566	-40000,00566	-8,31045E-09	-40000,00638	-8,57921E-09	9
864000	2,1544E+11	-40000,00639	-40000,00639	-8,57921E-09	-40000,00713	-8,86123E-09	10
ETC...							
5529600	28815682787	-40000,30647	-40000,30647	-4,79559E-07	-40000,34791	-6,19175E-07	64
5616000	25359654517	-40000,35394	-40000,35394	-6,19175E-07	-40000,40744	-8,29981E-07	65
5702400	21903621626	-40000,41654	-40000,41654	-8,29981E-07	-40000,48825	-1,17009E-06	66
5788800	18447582539	-40000,50295	-40000,50295	-1,1701E-06	-40000,60404	-1,77177E-06	67
5875200	14991534717	-40000,63004	-40000,63004	-1,77177E-06	-40000,78312	-2,99246E-06	68
5961600	11535473669	-40000,83585	-40000,83585	-2,99247E-06	-40001,0944	-6,10017E-06	69
6048000	8079390282	-40001,22865	-40001,22865	-6,10018E-06	-40001,75571	-1,86294E-05	70
6134400	4623261358	-40002,29697	-40002,29697	-1,86296E-05	-40003,90657	-0,000292356	71
6220800	1166993365	-40015,73154	-40015,73154	-0,000292391	-40040,99408	-7,59085E-05	72
6307200	-2291457182	-40031,64206	-40031,64206	-7,58362E-05	-40038,19431	-1,2043E-05	73

A passagem da distância Terra-asteroide a negativa significa impacto. Ou seja, o asteroide chega à Terra ao fim de cerca de 72 dias, e é esse o tempo que temos para resolver o problema.

Questão opcional: (para as mentes inquisidoras) a colisão com a Terra dar-se-á quando r < 6370 km, i.e. quando a distância é menor do que o raio da Terra. A que rapidez se dará o embate? Note que para obter esta rapidez com precisão razoável precisará de passo muito baixo, da ordem de h = 1 s.

O Excel usado acima já não dá para resolver esta questão... vão ser precisas mais de 6 milhões de iterações! Há mesmo que programar um integrador dedicado. Se o fizermos veremos que, para h = 1, o asteroide embate com rapidez de cerca de 41540 km/s, que é quase igual à rapidez inicial (40000 km/s). Ou seja, a atração gravitacional da Terra não é muito importante. Isto acontece porque a Terra é um planeta relativamente pequeno. Se repetirmos o exercício p.ex. para Júpiter, veremos que há uma diferença muito substancial entre a rapidez inicial e à chegada. Este efeito de aceleração à passagem por planetas gigantes, conhecido como "gravitational slingshot", é usado para catapultar sondas espaciais para fora do sistema solar, como p.ex. as sondas Pioneer, Voyager e, mais recentemente, a sonda New Horizons, que fotografou Plutão. O tratamento correto do slingshot é, naturalmente, bem mais complexo do que o nosso problema simplificado ☺. Requer p.ex. considerar-se o movimento a 2D e o momento angular orbital. Mais info em https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_assist