UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21002
Álgebra Linear I

30 de janeiro de 2013

- O exame é composto por **5** grupos de questões e respectivas alíneas, contém 3 página(s) e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II**, **III**, **IV** e **V** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com excepção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que correctos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

II	**III**	**IV**	**V**
3.0 val.	4.0 val.	6.0 val.	3.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretenda que seja considerada.

Questão 1

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \end{bmatrix}^\top \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$. Considere as afirmações seguintes:

(i) A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -2$.

(ii) O sistema $A_\alpha X = B_\alpha$ é possível, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ é solução do sistema $A_\alpha X = B_\alpha$ para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

- ☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.
- ☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.
- ☐ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.
- ☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por $f(x, y, z, w) = (x, y, z, w)$. Então:

- ☐ **a)** 0 é valor próprio de f.
- ☐ **b)** $(0, 0, 0, 1)$ não é vetor próprio de f.
- ☐ **c)** $f = f^2$.
- ☐ **d)** Não existe uma base de $\mathbb{R}^4$ formada só por vetores próprios de f.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 3

Considere os subespaços de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por

$$F = \langle 1, x^3, x^2 + x \rangle,$$
$$G = \langle 1 + x^3, 1 + x \rangle.$$

Então:

- ☐ **a)** $\dim(F + G) = 5$.
- ☐ **b)** $\dim(F + G) = 4$.
- ☐ **c)** $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ **d)** $\dim F = 2$.

Questão 4

Seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $|A_\beta|$ o determinante de A_β. Então:

- ☐ **a)** $|A_\beta| = \beta$.
- ☐ **b)** $|A_\beta| = \beta^2 - \beta$.
- ☐ **c)** $|A_\beta| = 0, \forall \beta \in \mathbb{R}$.
- ☐ **d)** $|A_\beta| = 2\beta$.

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio característico é $p_A(z) = z(z-1)(z-2)$. Então, A é uma matriz invertível.

b) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e o conjunto $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$. Então, $\mathcal{F}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

IV. Considere a aplicação linear $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} f(1,0,1) = & (1,2,3) \\ f(1,0,0) = & (3,-1,0) \\ f(0,1,1) = & (1,1,0). \end{cases}$$

a) Determine a expressão geral da aplicação f.

b) Determine a matriz $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ que representa f relativamente à base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ na partida e na chegada.

c) Defina os subespaços $\operatorname{Nuc} f$ e $\operatorname{Im} f$. Determine uma base para $\operatorname{Nuc} f$ e determine uma base para $\operatorname{Im} f$.

d) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\operatorname{Im} f$.

V. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma qualquer matriz $n \times n$ de elementos reais. Considere as matrizes $A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)$ e $A_a = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)$, designadas, respetivamente, por parte simétrica, e parte anti-simétrica, de A.

a) Mostre que A_s é uma matriz simétrica e que A_a é uma matriz anti-simétrica.

b) Mostre que A_s e A_a comutam se, e só se, A e $A^\top$ comutam.

c) Relacione entre si os traços de A, A_s e A_a. (Recorde que o traço de uma matriz B é definido por $\operatorname{Tr} B = \sum_{j=1}^{n} B_{jj}$.)

FIM