

U.C. 21082

Matemática Finita

6 de junho de 2018

- INSTRUÇÕES -

- A prova é constituída por 4 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas, ou respostas apresentadas em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular nem de elementos de consulta.
- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada questão incorreta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. Os restantes grupos de questões têm as cotações seguintes:

5	6	7	8	9
4.8	1.5	1.5	3.2	5.0

Nome:

Nº de Estudante: CC/BI nº

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. De quantas maneiras se podem reorganizar as letras da palavra “RESTAURAR”?

a) $9! - 3! - 2!$

c) $\frac{9^6}{2}$

b) $\frac{9!}{3!}$

d) nenhuma das opções anteriores

2. Seja X um conjunto finito tal que $\#X = n$ e $a \notin X$. Temos que $\#(X \times (\{a\} \cup X))$ é igual a

a) n^2

c) $n^2 + n$

b) $n^2 + 1$

d) $2n$

3. Sejam a e b números inteiros positivos tais que $a \cdot b = 2^5 \cdot 3^3$ e $\text{mdc}(a, b) = 2^2 \cdot 3$. Temos que $\text{mmc}(a, b)$ é igual a

a) $2^3 \cdot 3^2$

c) $2^4 \cdot 3^3$

b) $2 \cdot 3^3$

d) $2^2 \cdot 3$

4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a seguinte implicação

$$\text{Se } a \equiv b \pmod{n} \text{ e } b \equiv 1 \pmod{n} \text{ então } -1 \equiv -a \pmod{n}$$

a) é sempre falsa

c) é falsa apenas para n par

b) é falsa apenas para n primo

d) é sempre verdadeira

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

5. O João tem 30 livros diferentes no seu quarto. Desses 30 livros, 14 são de Física e 16 de Matemática. Sabendo que pretende doar 5 livros a uma Instituição de Solidariedade, em cada uma das seguintes situações indique quantas alternativas diferentes existem para o conjunto de livros a doar.

5.1) Qualquer livro pode ser doado.

5.2) Tem de doar exatamente dois livros de Matemática.

5.3) Não pode doar mais do que um livro de Física.

6. Usando o algoritmo de Euclides, calcule $\text{mdc}(300, 130)$.

7. Determine o coeficiente de x^2y^6 no desenvolvimento de $(2x - y)^8$.

8. Considere $10n^3 - n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

8.1) Prove, por indução matemática, que

$$3 \mid 10n^3 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

8.2) Prove que $10n^3 - n$ é par se e somente se n é par.

9. Considere a relação de recorrência dada pela fórmula de recorrência

$$x_n = 8x_{n-1} - 15x_{n-2}, \quad n \geq 2$$

e pelas condições iniciais

$$x_0 = 1 \quad \text{e} \quad x_1 = 7.$$

9.1) Indique o polinómio característico da fórmula de recorrência acima e calcule as suas raízes.

9.2) Denotando por $\langle a_n \rangle$ a sucessão solução da relação de recorrência acima, determine o seu termo geral.

9.3) Prove que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem que a_n e 3 são primos entre si.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM
