

”

E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio



UNIDADE CURRICULAR: Computação Numérica

CÓDIGO: 21180

DOCENTE: Yves Robert e Filipe Pais

A preencher pelo estudante

NOME: Luís Carlos Crispim Pereira

N.º DE ESTUDANTE: 2300163

CURSO: LEI – Licenciatura em Engenharia Informática

DATA DE ENTREGA: 29/11/25

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1.1 - Enunciado: Pretende-se uma expressão aproximada para o erro absoluto do volume, ε_V , em função do erro absoluto do raio, ε_r , e do erro relativo da altura $r_h : \varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h)$.

O erro absoluto de uma grandeza x é: $\varepsilon_x = |x - \bar{x}|$ e em particular para a altura h é $\varepsilon_h = |h - \bar{h}|$,

O erro relativo de x é: $r_x = \frac{\varepsilon_x}{|x|}$ e para a altura h é $r_h = \frac{\varepsilon_h}{|h|}$,

Isolando o erro absoluto em cada caso:

$$r_x = \frac{\varepsilon_x}{|x|} \Leftrightarrow \varepsilon_x = |x|r_x \qquad r_h = \frac{\varepsilon_h}{|h|} \Leftrightarrow \varepsilon_h = |h|r_h$$

Como é pedido obter (ε_r, r_h) , sabendo que: $V = f_{(r,h)} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Pelo Teorema de Taylor, as derivadas parciais devem ser avaliadas num ponto próximo dos valores exatos (\tilde{r}, \tilde{h}) . Como $r \approx \tilde{r}$ e $h \approx \tilde{h}$, podemos usar simplesmente r e h nas derivadas, entendendo que representam valores próximos dos verdadeiros. Assim, na expressão do volume, as variáveis r e h representam os valores exatos (ou muito próximos dos exatos) do raio e da altura.

As derivadas parciais são:

$$f'_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\pi}{3} \cdot 2rh = \frac{2\pi hr}{3} \qquad f'_h = \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \cdot \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2}{3}$$

Aproximando o erro absoluto do volume por (desprezando termos de ordem superior):

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) \approx |f'_r| \varepsilon_r + |f'_h| \varepsilon_h$$

Substituindo temos:

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) \approx \left| \frac{2\pi hr}{3} \right| \varepsilon_r + \left| \frac{\pi r^2}{3} \right| \varepsilon_h$$

Como sabemos que $\varepsilon_h = |h|r_h$, substituindo temos:

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) \approx \left| \frac{2\pi hr}{3} \right| \varepsilon_r + \left| \frac{\pi r^2}{3} \right| |h|r_h$$

Como estamos num cone físico assumimos que tanto o raio como a altura têm de ser positivos, pelo que podemos retirar o valor absoluto dos coeficientes, chegando assim a expressão solicitada:

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) \approx \frac{2\pi hr}{3} \varepsilon_r + \frac{\pi r^2}{3} h r_h$$

1.2 - Enunciado: pretende-se particularizar a expressão obtida na 1.1, substituindo os valores numéricos dados para obter o erro absoluto do volume apenas em função do raio r , e em seguida representar graficamente essa função.

Expressão obtida em 1.1:

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) \approx \frac{2\pi h r}{3} \varepsilon_r + \frac{\pi r^2}{3} h r_h$$

Dados do enunciado:

$$\varepsilon_r = 0,01$$

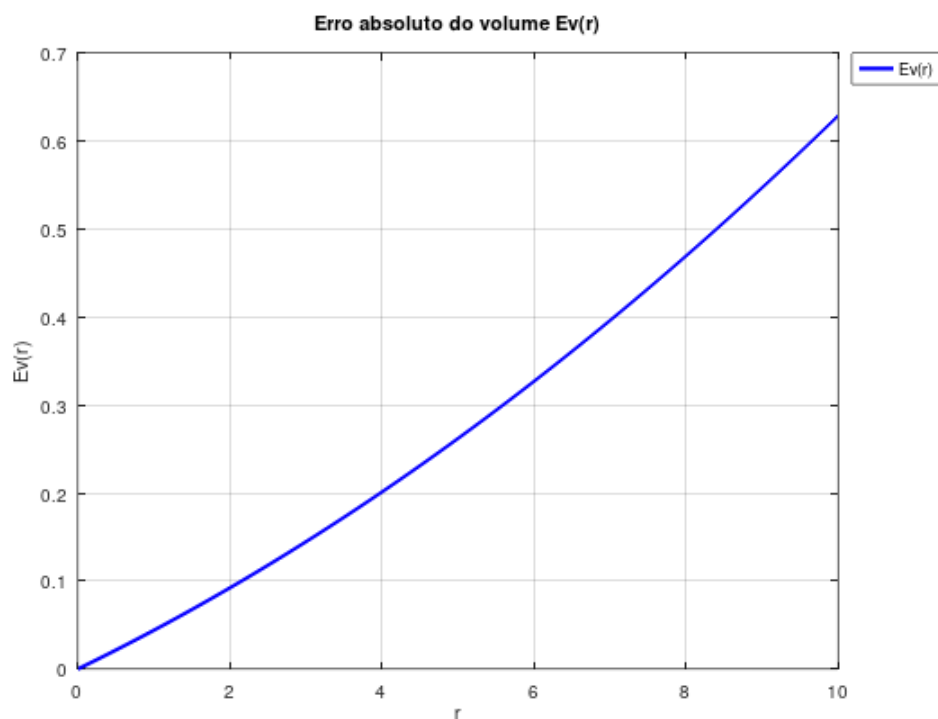
$$r_h = 0,1\% = \frac{0,1}{100} = 0,001$$

$$\tilde{h} = 2$$

Substituindo o erro absoluto do volume passa a depender apenas do raio. Assim, a expressão passa a escrever-se como uma função de r : $\varepsilon_V(r)$

$$\varepsilon_V(r) \approx \frac{2\pi 2r}{3} \cdot 0,01 + \frac{\pi r^2}{3} \cdot 2 \cdot 0,001 = \frac{0,04}{3} \cdot \pi r + \frac{0,002}{3} \cdot \pi r^2$$

Print do gráfico resultado do script do ficheiro efa22_1.m (incluído no zip).



1.3 - Enunciado: Pretende-se determinar o intervalo $r \in [0, r_{max}]$, tal que $\varepsilon_V(r) \leq \varepsilon_{max}$ com $\varepsilon_{max} = 0,3$, utilizando o método do ponto fixo.

Dados:

$$\varepsilon_V(r) \leq \varepsilon_{max} = 0,3 \text{ com } r \in [0, r_{max}], \quad \varepsilon_V(r) = \frac{0,04}{3} \cdot \pi r + \frac{0,002}{3} \cdot \pi r^2$$

Segundo o teorema de ponto fixo, obtemos uma solução aproximada para a equação $f(x) = x$ se $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, tal que:

$$\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq L < 1$$

Substituindo na fórmula temos que:

$$\begin{aligned} \frac{0,04}{3} \cdot \pi r + \frac{0,002}{3} \cdot \pi r^2 = 0,3 &\Leftrightarrow r \left(\frac{0,04}{3} \cdot \pi + \frac{0,002}{3} \cdot \pi r \right) = 0,3 \Leftrightarrow r = \frac{0,3}{\frac{0,04}{3} \cdot \pi + \frac{0,002}{3} \cdot \pi r} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{0,9}{0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi r} \end{aligned}$$

Assim temos a função iteradora:

Onde:

$$f(r) = \frac{0,9}{0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi r} \quad 0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi r = 0 \Leftrightarrow r = -20$$

Para a função iteradora ser válida temos de garantir que cumpre os requisitos do teorema do ponto fixo, ou seja $f(r)$ é uma função racional diferenciável e com domínio de f é $\mathbb{R} / \{-20\}$. Calculando a derivada:

$$f'(r) = \left(\frac{0,9}{0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi r} \right)' = \frac{0 - 0,9 \cdot 0,002 \cdot \pi}{(0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi \cdot r)^2} = \frac{-0,0018 \cdot \pi}{(0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi \cdot r)^2}$$

Logo:

$$\max_{r \in [0, max]} |f'(r)| \Leftrightarrow \max_{r \in [0, max]} \left| \frac{-0,0018 \cdot \pi}{(0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi \cdot r)^2} \right|$$

O máximo de uma fração é quando o denominador for o menor possível, então temos que o máximo da função será quando o $r = 0$, então temos que:

$$\frac{0,0018 \cdot \pi}{(0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi \cdot 0)^2} = \frac{0,0018\pi}{(0,04\pi)^2} \approx 0,36$$

Temos então que $L = 0,36$ (constante de Lipschitz) e que:

$$\max_{r \in [0, max]} |f'(r)| \leq L \leq 1 \Leftrightarrow \max_{r \in [0, max]} |f'(r)| \leq 0,36 \leq 1$$

Assim, a função iteradora cumpre um dos requisitos do teorema do ponto fixo, a contração.

Para cumprir o segundo requisito do teorema do ponto fixo temos de verificar que $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ onde:

$$\varepsilon_V(r) = \frac{0,04}{3} \cdot \pi r + \frac{0,002}{3} \cdot \pi r^2 = 0,3$$

Procedi a uma avaliação numérica da função $\varepsilon_V(r)$ em vários valores de r , recorrendo ao octave. Como r^2 é positivo, $\varepsilon_V(r)$ é uma função crescente para $r \geq 0$.

$$\varepsilon_V(5) \approx 0,262 < 0,3$$

$$\varepsilon_V(5,6) \approx 0,300 = 0,3$$

$$\varepsilon_V(5,5) \approx 0,294 < 0,3$$

$$\varepsilon_V(5,7) \approx 0,307 > 0,3$$

$$r \approx 5,6$$

Daqui retiramos que $\varepsilon_V(5,5) < 0,3 < \varepsilon_V(5,7)$

Escolhemos então como pontos para $[a, b]$ os pontos $[5,4,5,8]$ e temos como resultados:

$$\varepsilon_V(5,4) = \frac{0,04}{3} \cdot \pi(5,4) + \frac{0,002}{3} \cdot \pi(5,4)^2 \approx 0,287$$

$$\varepsilon_V(5,8) = \frac{0,04}{3} \cdot \pi(5,8) + \frac{0,002}{3} \cdot \pi(5,8)^2 \approx 0,313$$

Como $\varepsilon_V(5,4) < 0,3$ e $\varepsilon_V(5,8) > 0,3$, portanto a solução encontra-se entre estes dois valores. Além disso, como $f(r)$ é contínua e a solução esta compreendida no intervalo escolhido podemos afirmar que:

$$f([5,4,5,8]) \subset [5,4,5,8].$$

Concluimos portanto que a função iteradora adequada ao método do ponto fixo é:

$$f(r) = \frac{0,9}{0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi r}$$

e o intervalo para garantir a convergência é:

$$[a, b] = [5,4,5,8]$$

1.4 - Enunciado: pretende-se aproximar o valor de r_{max} através do método do ponto fixo, com estimativa inicial $r_0 = 0,1$. O critério de paragem exige obter pelo menos 5 algarismos significativos, e de acordo com o enunciado não se deve confundir a diferença $|r_k - r_{k-1}|$ com o erro absoluto $|r_{max} - r_k|$.

Dados:

$$f(r) = \frac{0,9}{0,04 \cdot \pi + 0,002 \cdot \pi r}$$

$$L = 0,36$$

Para estimar o erro absoluto utilizou-se a fórmula (1.24), termo do meio:

$$\varepsilon_k \approx \frac{L}{1-L} |r_k - r_{k-1}|$$

Foi elaborado um script em Octave, designado efa22_2.m, que calcula a sequência de aproximações r_k pelo método do ponto fixo e apresenta a respetiva tabela de iterações. A execução termina quando o erro absoluto estimado, calculado através da expressão (1.24) do manual, é suficientemente pequeno para garantir que a estimativa obtida possui pelo menos cinco algarismos significativos corretos.

Print do output do script efa22_2.m:

```

----- Metodo do Ponto Fixo -----
  k      r_k      erro
  0      0.100000000000000
  1      7.126340735458000    3.952e+00
  2      5.280456003248214    1.038e+00
  3      5.666015231857423    2.169e-01
  4      5.580899391227382    4.788e-02
  5      5.599468829928154    1.045e-02
  6      5.595407066229656    2.285e-03
  7      5.596295007618559    4.995e-04
  8      5.596100870851488    1.092e-04
  9      5.596143315165047    2.387e-05
 10      5.596134035467763    5.220e-06
 11      5.596136064306561    1.141e-06

Estimativa final r_max = 5.5961
Erro final estimado = 1.141e-06

```

Como o erro estimado na última iteração é $1,141 \cdot 10^{-6} < 0,5 \cdot 10^{-5}$, conclui-se que a aproximação obtida possui pelo menos 5 algarismos significativos corretos.

Portanto:

$$r_{max} \approx 5,5961$$