E-fólio A: Correcção Abreviada

1.

1.1. Num baralho usual existem 4 naipes. Fixado um naipe, existem 10 possibilidades para o valor mais elevado de uma sequência de 5 cartas (do 5 até ao Ás). Deste modo, existem $4 \times 10 = 40$ mãos de poker do tipo *straight flush*.

1.2. Para a escolha das três cartas do mesmo valor há 13 possibilidades para o seu valor. Fixado este valor, existem então 12 possibilidades para a escolha do valor das outras duas cartas que compõem um *full house*.

Por outro lado, existem quatro naipes com um mesmo valor. Ou seja, existem $\binom{4}{3} = 4$ maneiras diferentes para se fixarem três cartas do mesmo valor. De modo semelhante, há $\binom{4}{2} = 6$ maneiras distintas para se escolherem duas cartas de um mesmo valor.

Deste modo, existem $13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$ possíveis mãos de poker do tipo *full house*.

1.3. Num baralho de 52 cartas há $N = \binom{52}{5} = 2598960$ diferentes mãos de poker.

Fixado um naipe, há $\binom{13}{5} = 1287$ maneiras diferentes de se agruparem cinco cartas. A este número, há que retirar o conjunto de cartas que se encontram em sequência, ou seja, os *straight flush*. Deste modo, e entrando agora com os 4 possíveis naipes, há $n = (4 \times 1287) - 40 = 5108$ possibilidades para diferentes *flush*, sendo a probabilidade de sair uma tal mão de poker igual a

$$\frac{n}{N} = \frac{5108}{2598960}.$$

1.4. Dos 13 valores possíveis, existem $\binom{13}{2} = 78$ diferentes maneiras de se fixar o valor dos dois pares de cartas. **Para cada um destes valores**, um par pode ser escolhido de $\binom{4}{2} = 6$ maneiras diferentes. Para a quinta carta existem então 52-8=44 possibilidades. Deste modo, a probabilidade de se obter uma mão de poker do tipo *two pair* é igual a

$$\frac{78 \times 6 \times 6 \times 44}{2598960} = \frac{123552}{2598960},$$

em que o valor que surge no denominador é o número total de possíveis mãos de poker (determinado na alínea anterior).

2. Como $P(B) > 0$, tem-se

$$P(A|B) + P(\Omega \setminus A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P((\Omega \setminus A) \cap B)}{P(B)}.$$

Sendo $A \cap B$ e $(\Omega \setminus A) \cap B$ dois conjuntos disjuntos (ou, mutuamente exclusivos),

$$P(A \cap B) + P((\Omega \setminus A) \cap B) = P((A \cap B) \cup ((\Omega \setminus A) \cap B)).$$

Tem-se ainda

$$(A \cap B) \cup ((\Omega \setminus A) \cap B) = (A \cup (\Omega \setminus A)) \cap B = \Omega \cap B = B,$$

pelo que

$$P(A|B) + P(\Omega \setminus A|B) = \frac{P((A \cap B) \cup ((\Omega \setminus A) \cap B))}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

3. Este exercício é um problema de aplicação de probabilidades condicionadas.

3.1. Considerando os acontecimentos seguintes,

$$1 -'' \text{ linha ocupada}'', \quad 0 -'' \text{ linha desocupada}'',$$

o espaço de resultados pode ser representado por

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\},$$

onde em cada par ordenado a primeira coordenada é relativa à observação do primeiro minuto e a segunda coordenada à do minuto seguinte.

3.2. Pretende-se determinar a probabilidade condicionada $P(B|A)$, onde A e B designam, respectivamente, os acontecimentos,

$$\begin{array}{lcl} A & - & ''\text{linha desocupada num certo minuto } i'' \\ B & - & ''\text{linha desocupada no minuto } i+1'' \end{array}$$

Considerando, ainda, o acontecimento

$$B^c -'' \text{ linha ocupada no minuto } i+1'',$$

tem-se

$$P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 100\% - 30\% = 70\%.$$

3.3. Pretende-se determinar $P(B)$, para B o acontecimento definido na alínea anterior. Nesta alínea, é dado como certo que o acontecimento

$$A^c ='' \text{ linha ocupada num certo minuto } i''$$

acontece. Logo,

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B)}{1} = P(B)$$

e, assim, $P(B) = P(B|A^c) = 25\%$.

4.

4.1. Média da produção de bolota (designando por x a produção de bolota em toneladas):

$$\bar{x} = \frac{10+17+32+35+38+48}{6} = \frac{180}{6} = 30\,\text{ton.}$$

4.2. Desvio padrão da produção de bolota:

	x_j	$x_j - \bar{x}$	$(x_j - \bar{x})^2$
	10	-20	400
	17	-13	169
	32	2	4
	35	5	25
	38	8	64
	48	18	324
TOTAIS	180		986

Com estes dados calcula-se o desvio padrão:

$$s_x = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{6}(x_j - \bar{x})^2}{6}} = \sqrt{\frac{986}{6}} = 12,82.$$

4.3. Com os dados tabelados no enunciado obtém-se o diagrama de dispersão da Figura 1 seguinte, onde x representa a produção de bolota (em toneladas) e y o peso médio dos suinos (em quilogramas). O diagrama mostra o que parece ser uma

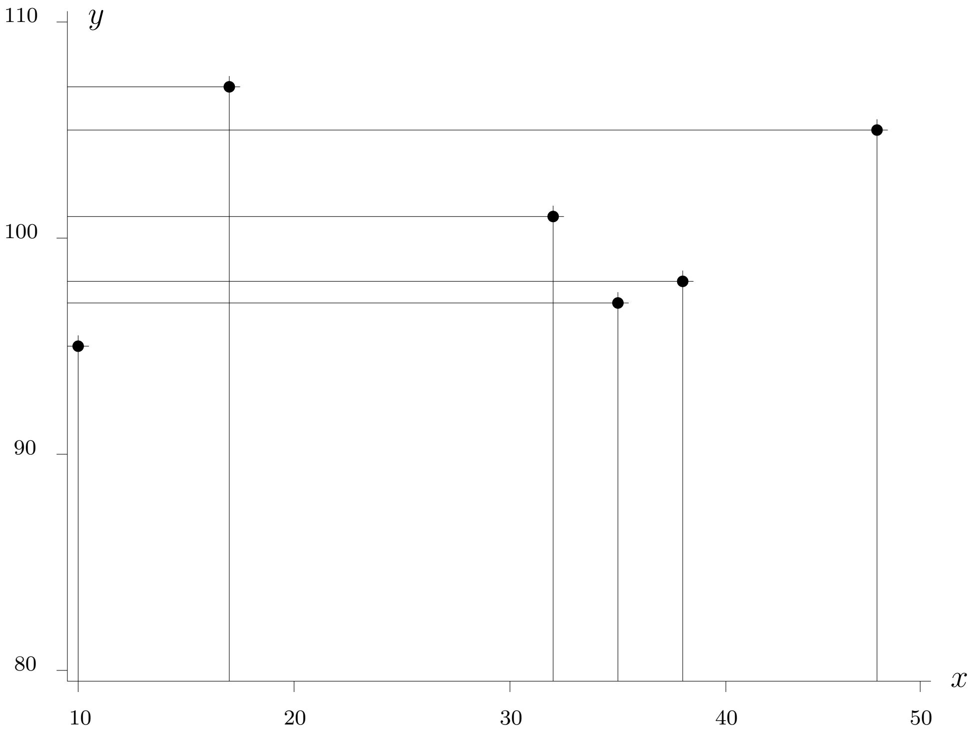

Figura 1: Diagrama de dispersão

correlação linear muito fracamente positiva entre as variáveis.

4.4. Assumiremos a notação da alínea anterior para as variáveis estatísticas em causa e ainda a seguinte notação para as médias e os desvios padrão:

$$\bar{x} = \frac{\sum_j x_j}{n}, \quad s_x = \sqrt{\frac{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}{n}},$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_j y_j}{n}, \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum_j (y_j - \bar{y})^2}{n}}, n = 6.$$

O coeficiente de correlação é, assim, dado por

$$r = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{6}(x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{6\, s_x s_y}.$$

Note-se que o desvio padrão de x já foi calculado na alínea 4.2 e, portanto, não precisamos de voltar a repeti-lo. Organizando os dados e os restantes cálculos em forma de tabela tem-se a tabela seguinte. (Na última linha da tabela apresenta-se a soma dos valores da coluna correspondente, quando tal valor é relevante para os cálculos.)

	x_i	$x_j - \bar{x}$	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_j - \bar{y})^2$	$(x_j - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
	10	-20	95	-5,5	30,25	110,0
	17	-13	107	6.5	42,25	-84,5
	32	2	101	0,5	0,25	1,0
	35	5	97	-3,5	12,25	-17,5
	38	8	98	-2,5	6,25	-20,0
	48	18	105	4,5	20,25	-81,0
TOTAIS	95		603		111,5	70,0

Média da variável y: $\bar{y} = \frac{603}{6} = 100,5\,\mathrm{Kg}$.

O desvio padrão da variável y é $s_y = \sqrt{111,5/6} = 4,31$, concluindo-se, portanto, que

$$r = \frac{70}{6 \times 12,82 \times 4,31} \approx 0,21.$$

Este valor traduz uma correlação linear positiva muito fraca dos dados, confirmando o que fora concluido na alínea anterior por observação do diagrama de dispersão.