ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre dia 1 de fevereiro de 2023 das 15h00 às 17h30 de Portugal Continental

Data de Limite de Entrega

1 de fevereiro de 2023, até às 17h30 de Portugal Continental

Conteúdos

Álgebra Linear

Competências

Saber aplicar os conceitos e técnicas de Álgebra Linear indicados no programa na formulação e resolução de problemas de natureza teórica e na resolução de problemas matemáticos.

Trabalho a desenvolver
Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste E-fólio Global é de 12 valores.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio Global na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 15 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioG.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo E-fólio Global até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Wolfram Bentz

Enunciado

Justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

I. (*2 valores*)

Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Im} T$.

b) $\det : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear.

II. (*4 valores*) Neste exercício, o valor de r é determinado pelos últimos 2 dígitos do seu número de estudante. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então $r = 45$.

Para $k \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx + 2z = 8 \\ 2x - y + z = 0 \\ -3x + y - 2z = r\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ a resolubilidade do sistema (1) e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

b) Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ verifique que as soluções que obteve são de facto soluções do sistema (1).

III. (*4 valores*)

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Determine o polinómio característico da matriz A.

b) Determine justificadamente a multiplicidade algébrica de cada um dos valores próprios da matriz A.

c) Para cada valor próprio da matriz A, determine justificadamente a sua multiplicidade geométrica e uma base para o seu espaço próprio.

d) Determine se é possível obter uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine P.

IV. (*2 valores*) Neste exercício, o valor de r é determinado pelos últimos 3 dígitos do seu número de estudante. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então $r = 345$.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{r+2} = -A$. O que pode afirmar sobre o determinante de A? Justifique.

FIM