U.C. 21157

Resolução do exame de Cálculo para Informática

24 de janeiro de 2018

1. (a) Temos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ que pode ser levantada da seguinte forma

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-6x+9)\sin(x)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2\sin(x)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x-3)\sin(x) = 0.$$

(b) Temos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x\sin(3x)}{3x^4+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^4}+\frac{x\sin(3x)}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{5}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{\sin(3x)}{x^3}}{3+\frac{5}{x^4}}.$$

Agora notamos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

e também

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^4} = 0.$$

Por outro lado, para $x > 0$,

$$-\frac{1}{x^3} \le \frac{\sin(3x)}{x^3} \le \frac{1}{x^3}$$

e como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} -\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0,$$

pelo teorema das sucessões enquadradas,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^3} = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x\sin(3x)}{3x^4+5} = \frac{0}{3} = 0.$$

2. (a) Calculamos os limites laterais

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 + \frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}\right).$$

Temos que o limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}$$

conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. No sentido de tentar usar a regra de Cauchy, calculamos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin(2x)}{\cos(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

pelo que, pela regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)} = 0.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

então,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Quanto ao outro limite lateral, temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x - \frac{2x}{x^2+1} + 1\right) = \lim_{x\to 0^+} (2x) - \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + 1 = 0 - \frac{0}{1} + 1 = 1.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

concluímos que f não é contínua no ponto $x = 0$.

(b) Pela alínea anterior, f não é contínua no ponto $x = 0$. Então também não é diferenciável nesse ponto, pelo que a proposição é falsa.

(c) Para $x \in]0, +\infty[$ temos $f(x) = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1} + 1$ e a derivada é dada por

$$f'(x) = 2 - \frac{2(x^2+1) - (2x)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2\left(x^2+1\right)^2 - 2(x^2+1) + 4x^2}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{2(x^2+1)(x^2+1-1) + 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1)x^2 + 4x^2}{(x^2+1)^2} > 0,$$

pois para $x \in]0, +\infty[$, temos $x^2 > 0$ e $x^2 + 1 > 0$. Então a derivada $f'(x)$ é positiva, pelo que $f(x)$ é crescente no intervalo $]0, +\infty[$.

3. Como f é contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em $[a, b]$, isto é, existem pontos $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ tais que

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}),\ \forall x \in [a, b].$$

Portanto

$$(f(x_{min}))^3 \leq (f(x))^3 \leq (f(x_{max}))^3$$

e como $-1 \leq \cos(e^x) \leq 1$, temos

$$(f(x_{min}))^3 - 1 + 3 \leq (f(x))^3 + \cos(e^x) + 3 \leq (f(x_{max}))^3 + 1 + 3$$

ou seja,

$$(f(x_{min}))^3 + 2 \leq\ g(x) \leq (f(x_{max}))^3 + 4,\ \forall x \in [a, b]$$

e a função g é limitada.

4. (a) Temos

$$\int \left(e^{3x} + \sin(2x) + x^3\right) dx = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{x^4}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Fazendo integração por partes temos

$$\int \cos^2(x)dx = \int \cos(x)\cos(x)dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx =$$

$$\sin(x)\cos(x) + \int \left(1 - \cos^2(x)\right) dx = \sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \cos^2(x)dx =$$

$$\sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx.$$

Logo

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx,$$

pelo que

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{\sin(x)\cos(x) + x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5. A área é dada por

$$\int_0^1 \sin(\pi x) + xdx.$$

Uma primitiva de $\sin(\pi x) + x$ é, por exemplo, $-\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi} + \dfrac{x^2}{2}$, pelo que, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^1 \sin(\pi x) + xdx = \left(-\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{\cos(0)}{\pi} - \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

FIM