

U.C. 21082

Matemática Finita

12 de setembro de 2018

- INSTRUÇÕES -

- A prova é constituída por 4 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas, ou respostas apresentadas em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular nem de elementos de consulta.
- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada questão incorreta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. Os restantes grupos de questões têm as cotações seguintes:

5	6	7	8	9
4.8	1.5	1.5	3.2	5.0

Nome:

Nº de Estudante: CC/BI nº

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(3x - 2)^8$ é

a) $2^3 \cdot 3^5 \cdot \binom{8}{5}$

c) $-2^5 \cdot 3^3 \cdot \binom{8}{5}$

b) $-2^3 \cdot 3^5 \cdot \binom{8}{5}$

d) nenhuma das opções anteriores

2. Considere a função $f : [3] \times [6] \rightarrow [21]$ definida por $f(n, m) = 5n + m$. Tem-se que

a) f não é injetiva nem sobrejetiva

c) f é injetiva mas não é sobrejetiva

b) f é sobrejetiva mas não é injetiva

d) f é bijetiva

3. Sejam $a, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ com p número primo. Temos que

a) $\text{mdc}(p, a) = a$ se $p|a$

c) $\text{mdc}(p, a) = p$

b) $\text{mdc}(p, a) = 1$ se a é primo

d) $\text{mdc}(p, a) = 1$ se $a < p$

4. Qual dos seguintes naturais é inverso multiplicativo de 35 módulo 4?

a) 2

c) 4

b) 3

d) nenhuma das opções anteriores

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

5. O Rodrigo tem 5 livros de Matemática, 3 livros de Física e 2 livros de Química, todos diferentes. Querendo alinhá-los numa única prateleira, em cada uma das seguintes situações indique quantos alinhamentos diferentes consegue formar.

5.1) Não existem restrições sobre a colocação dos livros.

5.2) Livros de uma mesma disciplina ficam juntos.

5.3) Os dois livros de Química não ficam juntos.

6. Usando o algoritmo de Euclides, calcule $\text{mdc}(272, 119)$.

7. Mostre, usando a convolução de Vandermonde, que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

8. Considere $n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$.

8.1) Prove, por indução matemática, que

$$2 \mid n^2 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

8.2) Mostre que **não é verdade** que, para todo $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tem

$$a \mid n^a - n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

9. Considere a relação de recorrência dada pela fórmula de recorrência

$$x_n = 10x_{n-1} - 21x_{n-2}, \quad n \geq 2$$

e pelas condições iniciais

$$x_0 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = 4.$$

9.1) Indique o polinómio característico da fórmula de recorrência acima e calcule as suas raízes.

9.2) Denotando por $\langle a_n \rangle$ a sucessão solução da relação de recorrência acima, determine o seu termo geral.

9.3) Prove que para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tem que $\text{mdc}(a_n, 3) = 1$.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Lei da Simetria**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM