Elementos de Análise Infinitesimal I | 21030

Proposta de Resolução Sumária

1. Atendendo a que a função seno é uma função limitada, que toma valores entre -1 e 1, tem-se

$$0 \leq \left| x^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x|^k$$

com $\lim_{x\to 0} |x|^k = 0$ (porque $k > 0$). Assim e pelo Princípio Geral dos Limites Enquadrados (Teorema 4, alínea 1, pág. 218),

$$\lim_{x\to 0} \left| x^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| = 0 \implies \lim_{x\to 0} x^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

2.3. Dado que

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(2x)} = +\infty,$$

a função g não é contínua no ponto $\frac{\pi}{2}$ e, por conseguinte, g não é diferenciável nesse ponto (Teorema 4, pág. 279).

Nota: De acordo com o enunciado, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o que significa que o domínio da função g é todo o conjunto $\mathbb{R}$. Em particular, isto significa que g está definida no ponto $\frac{\pi}{2}$.

3.1. A continuidade da função h no intervalo $]0, a]$ é uma consequência da continuidade da função f no mesmo intervalo e do Teorema 11, pág. 236, já que a função identidade é uma função contínua em $\mathbb{R}$ que não se anula no intervalo $]0, a]$.

Por sua vez, a diferenciabilidade da função h em $]0, a[$ é uma consequência da diferenciabilidade da função f no intervalo $]0, a[$ e do Teorema 2, pág. 286, uma vez que a função identidade é diferenciável em $\mathbb{R}$ e não se anula em $]0, a[$.

Resta estudar a continuidade da função h no ponto 0, a qual resulta de $f(0) = 0$ e de, por hipótese, $f'_d(0)$ existir. Tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'_d(0) = h(0).$$

3.2. Como h é uma função contínua em $[0, a]$ e diferenciável em $]0, a[$, a monotonia de h pode ser estudada pela análise do sinal de h' (Teorema 1, pág. 337). Para o efeito, há que provar que

$$h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \geq 0, \quad \forall\, x \in \,]0, a[\,,$$

o que é equivalente a $f'(x)x - f(x) \geq 0$, ou a $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$, para qualquer $x \in \,]0, a[$. A última desigualdade é uma consequência do Teorema de Lagrange (Teorema 3, pág. 317). Com efeito, para cada $0 < x \leq a$ fixo, resulta da hipótese de continuidade e de diferenciabilidade de f e do Teorema de Lagrange que existe um ponto $c \in \,]0, x[$ tal que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c).$$

Sendo f' uma função crescente, tem-se então que

$$x > c \implies f'(x) \geq f'(c) = \frac{f(x)}{x},$$

com o que fica provado o pretendido.