ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve resolução do exame de 18 de fevereiro

I. Questões de escolha múltipla:

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Exame	$d)$	$b)$	$a)$	$d)$
P-fólio	$d)$	$b)$	$d)$	–

Na **Questão 1** podemos calcular o determinante de A usando a primeira linha e obter $\det A = -1$, o que exclui logo as 2 primeiras opções. Como a matriz é 3×3 tem-se $\det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$.

Na **Questão 2** tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e portanto $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}^\top$ é vetor próprio de A com valor próprio associado 3.

Na **Questão 3** tem-se

$$A^2 - 5A = I_n \implies A(A-5I_n) = I_n \text{ e } (A-5I_n)A = I_n,$$

e portanto A é invertível com inversa $A - 5I_n$.

Na **Questão 4** o subespaço F pode escrever-se como $F = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$, e portanto F, tal como G, tem dimensão 2. Observando os geradores de F e G concluímos que $\dim(F \cap G) = 1$. Pelo Teorema das Dimensões $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G) = 2+2-1 = 3$.

II. **a)** A afirmação é falsa.

Se λ é valor próprio de A então existe um vetor não nulo u tal que $Au = \lambda u$, ou seja $(A - \lambda I_n)u = 0$. Isto que dizer que o núcleo da aplicação linear $A - \lambda I_n$ não se reduz ao vetor nulo, pois $u \neq 0$, e portanto a matriz $A - \lambda I_n$ não é invertível.

b) A afirmação é verdadeira.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e B a matriz definida por $B = A - A^\top$. Então os elementos da matriz B são $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$ e portanto

$$b_{ji} = a_{ji} - a_{ij} = -\left(a_{ij} - a_{ji}\right) = -b_{ij},$$

ou seja B é hemi-simétrica.

III. Condensando a matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 11 & 5 & 9 \\ 4 & 18 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

obtem-se a solução única $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

IV. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Os valores próprios da matriz A são as soluções de $\det(A - \lambda I_3) = 0$, ou seja de

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Usando a última linha para calcular este determinante tem-se

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

Os valores próprios da matriz A são 1 (com multiplicidade algébrica 2), e 2 (com multiplicidade algébrica 1).

b) O espaço próprio E_1 associado ao valor próprio 1 é gerado pelas soluções não nulas de $(A - I_3)u = 0$, ou seja (sendo $u = (x, y, z)$) de

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ x-z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Assim o espaço próprio $E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\right\} = \langle (1, 0, 1)\ ,\ (0, 1, 0) \rangle$, e portanto o valor próprio 1 tem multiplicidade geométrica 2.

O espaço próprio E_2 associado ao valor próprio 2 é gerado pelas soluções não nulas de $(A - 2I_3)u = 0$, ou seja (sendo $u = (x, y, z)$) de

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & -1 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ x-y-z \\ -z \end{pmatrix} = 0.$$

Assim o espaço próprio $E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge x - y = 0\right\} = \langle (1, 1, 0) \rangle$.

c) Para justificar que a matriz A é diagonalizável podemos observar que a soma das multiplicidades geométricas é igual à ordem da matriz A, ou seja $2+1=3$, ou reparar que A tem 3 vetores próprios linearmente indepedentes.

Sejam P a matriz cujas colunas são os vetores próprios

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e D a matriz diagonal com os valores próprios de A

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por construção a matriz P é invertível e a matriz D também é invertível pois nenhum dos valores próprios é igual a 0.

Estas matrizes P e D são tais que $P^{-1}AP = D$.

V. *Nota*: Havia uma gralha no enunciado deste grupo. Onde está um "d" deveria estar um "w".

Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z, w) = (x - y, y - z, z - w).$$

a) Para mostrar que f é uma aplicação linear temos de verificar as 2 condições $f(X + X') = f(X) + f(X')$ e $f(\alpha X) = \alpha f(X)$ para $X = (x, y, z, w)$, $X' = (x', y', z', w')$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} f(X + X') &= f\left((x, y, z, w) + (x', y', z', w')\right) \\ &= f\left((x + x', y + y', z + z', w + w'\right) \\ &= \left((x + x' - (y + y'), y + y' - (z + z'), z + z' - (w + w')\right) \\ &= \left((x - y + x' - y'), y - z + y' - z'), z - w + z' - w')\right) \\ &= (x - y, y - z, z - w) + (x' - y', y' - z', z' - w') \\ &= f(x, y, z, w) + f(x', y', z', w') \\ &= f(X) + f(X'), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(\alpha X) &= f\left(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w\right) \\ &= \left(\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha z, \alpha z - \alpha w\right) \\ &= \alpha\left(x - y, y - z, z - w\right) \\ &= \alpha f(X), \end{aligned}$$

o que prova a linearidade de f.

b) O núcleo de f consiste nas soluções de $f(x,y,z,w)=0$, ou seja as soluções de $((x-y, y-z, z-w)=(0,0,0)$. Esta última equação pode escrever-se como um sistema $\begin{cases} x=y \\ y=z \\ z=w \end{cases}$, cuja solução é o subespaço gerado pelo vetor $(1,1,1,1)$.

c) Usando o Teorema da Dimensão , $\dim\mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Nuc}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$, ou ainda $4 = 1 + \dim \mathrm{Im}\, f$, e portanto a dimensão da imagem de f é $4-1=3$.

Uma vez que a imagem de f é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão concluimos que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.

d) Uma vez que o núcleo de f não se reduz ao vetor nulo, f não é injetiva; f é sobrejetiva pois como vimos $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.

e) A matriz $\mathscr{M}(\text{b.c.}_{\mathbb{R}^4}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, f)$ que representa f nas bases canónicas em $\mathbb{R}^4$ e em $\mathbb{R}^3$ é a matriz que tem por colunas as imagens dos vetores da base canónica em $\mathbb{R}^4$. Como

$$\begin{cases} f(1,0,0,0) = (1,0,0), \\ f(0,1,0,0) = (-1,1,0), \\ f(0,0,1,0) = (0,-1,1), \\ f(0,0,0,1) = (0,0,-1), \end{cases}$$

tem-se $\mathscr{M}(\text{b.c.}_{\mathbb{R}^4}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

VI. Se $n=2$ a condição $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \alpha$ significa que a primeira linha satisfaz $a_{11}+a_{12}=\alpha$ e a segunda linha satisfaz $a_{21}+a_{22}=\alpha$. Estas 2 igualdades podem escrever-se sob forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ isto significa que α é um valor próprio de A.

No caso geral as condições $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \alpha$ são equivalentes a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

FIM