# Álgebra Linear II | 21003

**Proposta de resolução**

1. **(2 valores)** Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno

$$\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = x_1y_1+x_2y_2+4x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4$$

(vocês podem assumir sem justificação que este é um produto interno.)

Sejam $F=\langle v_1,v_2,v_3\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ e $b\in\mathbb{R}^4$, com

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}.$$

Determine

a. **(1,6 valores)** uma base ortonormada de $F$ usando o processo de Gram-Schmidt;

**Resolução:** Vamos escolher $u_1=v_1$. Porque $||u_1||=\sqrt{u_1|u_1}=\sqrt{1+1+2}=2$, normalizamos $u_1$ para obter

$$n_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Pelo processo de Gram-Schmidt, calculamos um vector ortogonal

$$u_2=v_2-\langle n_1,v_2\rangle n_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}(-1-1)\left[\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

Porque $||u_2||=\sqrt{1+1+2}/2=1$, $u_2$ é normal, temos $n_2=u_2$.
Aplicando o processo mais uma vez, obtemos

$$u_3=v_3-\langle n_1,v_3\rangle n_1-\langle n_2,v_3\rangle n_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1-1-1) \left[ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right] - \frac{1}{2}(-1+1-1) \left[ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e normalizamos para obter

$$n_3 = \frac{2u_3}{||u_3||} = \frac{2u_3}{\sqrt{4+4+16-2-2+2}} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Então $(n_1, n_2, n_3)$ é uma base ortonormada de $F$.

b. **(0,4 valores)** a projecção $\text{proj}_F b$.

**Resolução:** Tendo respondido à alínea anterior, obtemos

$$\text{proj}_F b = \langle b, n_1 \rangle n_1 + \langle b, n_2 \rangle n_2 + \langle b, n_3 \rangle n_3$$

$$= \frac{1-1-2-4}{2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{-1+1-2-4}{2 \cdot 2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2+2+16-2+4-4}{\sqrt{22}\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{9}{11} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{11} \\ \frac{18}{11} \\ \frac{18}{11} \\ \frac{24}{11} \end{bmatrix}$$

**2. (2 valores)** Considere que $\mathbb{R}^2$ está munido do produto interno

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{4} + x_2 y_2$$

(vocês podem assumir sem justificação que este é um produto interno.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o endomorfismo $f((x, y)) = (4x, 2y)$.

Determine $f^*$, o endomorfismo adjunto de $f$. Escreva sua resposta como uma fórmula $f^*((x, y)) = \ldots$

**Resolução:** Relativamente à base canónica $\mathcal{B}_c$, temos

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos fazer uma mudança de base $\mathcal{B}_c$ para uma base ortonormada $\mathcal{B}'$, de forma a poder usar os resultados para matrizes em bases ortonormadas.

Para encontrar $\mathcal{B}'$, começamos (arbitrariamente) com $u_1 = (1, 0)$ e procuramos um vetor ortogonal $u_2 = (y_1, y_2)$. Temos $0 = \langle u_1, u_2\rangle = y_1 + \frac{y_2}{4}$. Com $y_2 = 4$, obtemos $(y_1, y_2) = (-1, 4)$. Porque $||u_1|| = \sqrt{1^2} = 1$, e $||u_2|| = \sqrt{(-1)^2 + \frac{(-1)4+4(-1)}{4} + 4^2} = \sqrt{15}$, uma escolha adequada para $\mathcal{B}'$ é $((1, 0), (\frac{-1}{\sqrt{15}}, \frac{4}{\sqrt{15}}))$.

Seja $P$ a matriz de mudança da base $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}_c$. Logo

$$P = \mathcal{M}(\mathsf{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{15}} \end{bmatrix},$$

cuja inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa f com respeito à base $\mathcal{B}'$ é

$$\begin{aligned} D &= \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{-2}{\sqrt{15}} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Estando numa base ortonormada, o endomorfismo adjunto de $f$ será representado pela matriz

$$D^* = \mathcal{M}(f^*, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{15}} & 2 \end{bmatrix}.$$

Para expressar $f^*$ na forma exigida, temos que reverter para a b.c.

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}(f^*, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{15}} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{62}{15} & \frac{-2}{\sqrt{15}} \\ \frac{-8}{15} & \frac{8}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{62}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{-8}{15} & \frac{28}{15} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

isto é $f^*((x, y)) = (\frac{62}{15}x + \frac{8}{15}y, -\frac{8}{15}x + \frac{28}{15}y)$.

FIM