

U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística
12 de setembro de 2019

- INSTRUÇÕES -

- A prova é composta por 3 grupos de questões e contém 3 página(s). O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta).
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Todas as questões deverão ser **respondidas e justificadas** na folha de ponto, devidamente identificada. Utilize unicamente tinta azul ou preta e uma letra legível.
- É permitido o uso de máquina de calcular não gráfica. Não é permitida a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. No final do enunciado encontra-se um formulário.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se estas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

COTAÇÃO E CRITÉRIOS DE CORREÇÃO:

- Correção científica das respostas; escrita clara e objectiva; estrutura lógica das respostas.
- Apresentação de cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justificação cuidadosa e detalhada de todos os cálculos, raciocínios e afirmações. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- O aluno pode arbitrar um valor adequado da resposta a uma alínea que não tenha respondido, caso este seja necessário para a resolução de uma alínea posterior.
- A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 3 grupos de questões é a seguinte:

Questão	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1.1	3.1.2	3.1.3	3.2
Cotação	2.0	1.25	1.5	1.5	1.25	1.25	1.25	2.0

- 1 Num determinado dia, um agente de viagens vendeu bilhetes de avião para 73 clientes diferentes, tendo classificado o país destino da viagem: Peru (P); Espanha (E); Lituânia (L); França (F); México (M); Outros (O).

A tabela seguinte mostra os resultados obtidos.

E	L	F	E	L	E	E	P	F	L
M	E	E	O	E	P	O	E	F	O
O	L	O	E	L	F	L	E	L	E
O	E	O	L	P	E	E	L	E	M
E	O	E	O	P	P	E	F	E	O
P	E	L	E	F	O	L	F	P	E
E	O	E	E	E	M	E	L	E	P
O	E	L							

- 1.1 Construa a tabela de frequências dos países destino das viagens.
- 1.2 Represente estes dados através de um gráfico de barras utilizando frequências relativas.
- 2 Suponha, que no final de uma linha de dobragem automática de caixas, 7% das caixas são retocadas manualmente por um funcionário. Sabe-se ainda que o ritmo de dobragem é uma caixa por minuto.
- 2.1 Calcule a probabilidade do funcionário permanecer dez minutos sem executar nenhum retoque.
- 2.2 Calcule o tempo, que em média, o funcionário permanece sem executar nenhum retoque.
- 3 Considere a variável aleatória contínua X com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x < 0 \text{ e } x > 3 \end{cases}$$

- 3.1 Calcule:

[3.2.1] $P(X \leq 1.50)$

[3.2.2] $P(X \geq 2)$

[3.2.3] $P(1.00 \leq X \leq 2.50)$

- 3.2 Calcule a função distribuição de X .

FORMULÁRIO

Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se } P(B) > 0$$

Teorema de Bayes

Se $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ é uma partição de Ω (espaço de resultados), então, $\forall B$ para o qual $P(B) > 0$, ter-se-á:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j)P(B|A_j)}$$

Tabela de Distribuições

	P(X = k) ou f(x)	E(X)	V(X)
<i>Unif</i> (n)	$\frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
<i>Bin</i> (n, p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$	np	np(1-p)
<i>G</i> (p)	$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
<i>H</i> (N, M, n)	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(M, n)$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
<i>P</i> (λ)	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$	λ	λ
<i>U</i> (a, b)	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
<i>Exp</i> (λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Note que: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$