# Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

**Período de Realização**

Decorre de 11 a 17 de maio de 2020

**Data de Limite de Entrega**

17 de maio de 2020, até às 23h55 de Portugal Continental

**Temas**

Até ao Tópico 3 da UC.

**Objetivos**

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes ao tópico indicado supra.

**Critérios de avaliação e cotação**

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 0,5 valores para cada alínea

Total: 2,0 valores

**Normas a respeitar**

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 12 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioC.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

*Fernando Pestana da Costa*

**Trabalho a desenvolver**

**1.** Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão[1]

$$\Phi(x,y) = \int_x^y e^{-s^2} ds. \tag{1}$$

**a)** Prove que $\Phi$ é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

**b)** Prove que, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$, a equação $\Phi(x_0, y) - y = 0$ tem sempre *pelo menos uma* solução $y_0$.

**c)** Seja $(x_0, y_0)$ uma solução de $\Phi(x,y) - y = 0$. Para quais destes pontos $(x_0, y_0)$ é que pode garantir que, numa sua vizinhança, esta equação define implicitamente uma função $y = \varphi(x)$.

**d)** Sendo $(x_0, y_0)$ um dos pontos em causa na alínea anterior, determine, justificando cuidadosamente, uma expressão para o polinómio de Taylor de segunda ordem de $\varphi$ em $x_0$.

FIM

[1] A primitiva da função $s \mapsto e^{-s^2}$ não pode ser expressa em termos de operações algébricas com as funções usuais do Cálculo, pelo que *não deve* tentar obter uma expressão "explícita" de $\Phi$ para resolver qualquer das questões que se seguem.

RESOLUÇÃO

**1.a)** Comecemos por estudar o domínio de $\Phi$. Dado que $s \mapsto e^{-s^2}$ é uma função integrável em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ (porque é uma função contínua), o integral que define $\Phi$ faz sentido quaisquer que sejam $x$ e $y$, ou seja: o domínio de $\Phi$ é $\mathbb{R}^2$. Pelas razões que acabámos de apontar, assumindo que a variável $x$ está fixa $\Phi$ será uma função de apenas uma variável e é uma primitiva de $e^{-s^2}$. Assim, pelo teorema fundamental da Análise,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{-y^2}. \tag{2}$$

Fixe-se agora $y$ e considere-se $\Phi$ apenas como função de $x$. Escrevendo

$$\Phi(x,y) = \int_x^y e^{-s^2} ds = -\int_y^x e^{-s^2} ds = \int_y^x (-e^{-s^2}) ds,$$

pelo que, pelas mesmas razões invocadas anteriormente, tem-se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -e^{-x^2}. \tag{3}$$

Ora, por (2) e (3) sabe-se que as derivadas parciais de $\Phi$ são funções contínuas, ou seja $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e, consequentemente[2], é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

**1.b)** Considerando a função $F(x_0, y) := \Phi(x_0, y) - y$. Queremos ver que $F$ (como função só de $y$, para cada $x_0$ fixo) tem pelo menos uma solução. Note-se que $F$ é diferenciável e, portanto, é também contínua. Se provarmos que existem $y_-$ e $y_+$ tais que $F(x_0, y_-) < 0 < F(x_0, y_+)$ poderíamos aplicar o teorema do valor intermédio para concluir a existencia de um zero de $F(x_0, y)$ para algum $y$ algures entre $y_-$ e $y_+$. Se $F$ não tivesse $\Phi$ ,i.e. se fosse só $F(x_0, y) = -y$, o resultado seria óbvio pois ter-se-ia $F(x_0, y) > 0$ quando $y < 0$ e $F(x_0, y) < 0$ quando $y > 0$. Com o $\Phi$ na definição de $F$ o problema fica um pouco mais complicado e não é possível saber facilmente qual é exatamente o sinal de $F$ para um dado $y$. No entanto, se conseguirmos provar que existe uma constante $K$ tal $-K < \Phi(x_0, y) < K$ então pode-se concluir imediatamente que

$$\lim_{y \to -\infty} F(x_0, y) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y \to +\infty} F(x_0, y) = -\infty.$$

[2] Pelo Teorema 2.2.2 de *Cálculo Diferencial e Integral em* $\mathbb{R}^n$ de Gabriel Pires, ou Teorema 4.6 de *Introdução à Análise em* $\mathbb{R}^n$ de Campos Ferreira

Mas então, pela própria definição dos limites, terão de existir pontos $y_+ < 0$ e $y_- > 0$ com as propriedades referidas acima, provando-se o pretendido.

Portanto, o problema reduz-se a provar que, para cada $x_0$ a função $\Phi(x_0, y)$ é uma função limitada. Como a função $e^{-s^2}$ é integrável em todos os intervalos limitados de $\mathbb{R}$ (porque está definida e é contínua em $\mathbb{R}$), para decidir a questão da limitação, ou não, da função $\Phi(x_0, y)$ só é necessário ver o que acontece quando $y \to \pm\infty$. Vejamos primeiro o caso $y \to +\infty$. O problema seria fácil se em vez de $e^{-s^2}$ estivesse $e^{-s}$ na função integranda, pois, nesse caso, seria fácil ter uma expressão simples para $\Phi$. Relembrando que $s^2 > s$ sempre que $s > 1$ (e que, portanto, nesses casos, $e^{-s^2} < e^{-s}$) e estando interessados em ver o que acontece quando $y \to +\infty$, podemos, sem perda de generalidade, considerar que $y > \max\{1, x_0\}$. Considerando um número real fixo $A \in ]\max\{1, x_0\}, y[$ pode-se escrever[3]

$$\Phi(x_0, y) = \int_{x_0}^{y} e^{-s^2} ds = \int_{x_0}^{A} e^{-s^2} ds + \underbrace{\int_{A}^{y} e^{-s^2} ds}_{< \int_A^y e^{-s} ds} < \int_{x_0}^{A} e^{-s^2} ds + e^{-A}.$$

Como o resultado no membro direito não depende de $y$ concluímos, como pretendido, que $\Phi(x_0, y)$ é limitado superiormente por uma constante independente de $y$. Vejamos agora o caso em que $y \to -\infty$. Seguindo a mesma ideia usada na situação anterior, considere-se, sem perda de generalidade, $y < \min\{-1, x_0\} \leqslant -1$ e seja $B$ fixado em $]y, \min\{-1, x_0\}[$. Note-se que para $s < -1$ tem-se $-s^2 < s$. Portanto, o argumento anterior permite agora escrever

$$\begin{aligned}
\Phi(x_0, y) = \int_{x_0}^{y} e^{-s^2} ds \;&=\; -\int_{y}^{x_0} e^{-s^2} ds \\
&= -\underbrace{\int_{y}^{B} e^{-s^2} ds}_{< \int_y^B e^{s} ds} - \int_{B}^{x_0} e^{-s^2} ds \\
&> e^{y} - e^{B} - \int_{x_0}^{B} e^{-s^2} ds \\
&> -e^{B} - \int_{x_0}^{B} e^{-s^2} ds.
\end{aligned}$$

[3] Relembrando que $\displaystyle\int_A^y e^{-s} ds = e^{-A} - e^{-y} < e^{-A}$.

Novamente neste caso, o membro direito é independente de $y$ pelo que se conclui que $y \mapsto \Phi(x_0, y)$ é limitada inferiormente por uma constante válida para todos os $y$. Conjugando com o caso anterior concluímos que $y \mapsto \Phi(x_0, y)$ é uma função limitada em $\mathbb{R}$ e, pelo que ficou visto acima, isto é suficiente para assegurar que, para cada $x_0$ fixo, a equação $\Phi(x_0, y) - y = 0$ tem pelo menos uma solução.

**1.c)** Dado que $\Phi$ é diferenciável tem-se que $F$ também o é. Aplicando o teorema da função implíita sabemos que $F(x, y) = 0$ define implicitamente uma função $y = \varphi(x)$ numa vizinhança de $(x_0, y_0)$ sempre que $F(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Como

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_x^y e^{-s^2} ds - y\right) = e^{-y^2} - 1,$$

a aplicação do teorema da função implícita requer que se tenha $e^{-y_0^2} \neq 1$ sempre que $F(x_0, y_0) = 0$, ou seja, que seja $y_0 \neq 0$ quando $F(x_0, y_0) = 0$. A questão que se coloca é: existem pontos com estas características ? Ou seja: sabemos já, da alínea anterior, que, para cada $x_0$ existe pelo menos um $y_0$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$; mas será este $y_0 \neq 0$? Se $y_0 = 0$ então

$$F(x_0, 0) = 0 \Longleftrightarrow \int_{x_0}^0 e^{-s^2} ds = 0,$$

e, como a função integranda é positiva, conclui-se daqui que tem de se ter $x_0 = 0$. Ou seja, acabámos de provar que $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ e portanto, pela contra-recíproca, $x_0 \neq 0 \Rightarrow y_0 \neq 0$. Adicionalmente, se $x_0 = 0$ então tem-se

$$y > 0 \Rightarrow \int_0^y e^{-s^2} ds < \int_0^y 1 ds = y \Leftrightarrow F(0, y) < 0$$

$$y < 0 \Rightarrow \int_0^y e^{-s^2} ds > \int_0^y 1 ds = y \Leftrightarrow F(0, y) > 0,$$

pelo que a única solução possível de $F(0, y_0) = 0$ é a solução $y_0 = 0$, já vista anteriormente.

Com isto conclui-se que os pontos $(x_0, y_0)$ satisfazendo $F(x_0, y_0) = 0$ e em torno dos quais o teorema da função implícita garante que $F(x, y) = 0$ define implicitamente $y = \varphi(x)$, para alguma função $\varphi$ são todos os pontos para os quais $F(x_0, y_0) = 0$ exceto o ponto $(0, 0)$.

**1.d)** Nas condições da alínea anterior o teorema da função implícita garante a existência de um intervalo aberto $U$ contendo $x_0$ e de uma função duas vezes continuamente diferenciável[4] $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tais que $y_0 = \varphi(x_0)$ e $F(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U$. Derivando ambos os membros desta igualdade (em ordem à única variável aí existente, $x$) e atendendo às derivadas já calculadas na alínea 1.a) vem

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) \\ &= -e^{-x^2} + \big(e^{-\varphi(x)^2} - 1\big)\varphi'(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Derivando novamente cada um dos membros desta expressão (em ordem a $x$, que é a sua única variável independente) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\Big(-e^{-x^2} + \big(e^{-\varphi(x)^2} - 1\big)\varphi'(x)\Big) \\ &= 2xe^{-x^2} - 2\varphi(x)\big(\varphi'(x)\big)^2 e^{-\varphi(x)^2} + \big(e^{-\varphi(x)^2} - 1\big)\varphi''(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo $(x, \varphi(x))$ por $(x_0, y_0)$ em (4) obtém-se

$$\varphi'(x_0) = \frac{e^{-x_0^2}}{1 - e^{-y_0^2}} \tag{6}$$

e usando este valor e o mesmo ponto $(x_0, y_0)$ em (5) conclui-se que

$$0 = 2x_0 e^{-x_0^2} - 2y_0 \left(\frac{e^{-x_0^2}}{1 - e^{-y_0^2}}\right)^2 e^{-y_0^2} + \big(e^{-y_0^2} - 1\big)\varphi''(x_0),$$

ou seja

$$\varphi''(x_0) = \frac{2x_0 e^{-x_0^2}}{1 - e^{-y_0^2}} - \frac{2y_0 e^{-2x_0^2 - y_0^2}}{\big(1 - e^{-y_0^2}\big)^3}. \tag{7}$$

Consequentemente, o polinómio de Taylor de segunda ordem de $\varphi$ em $x_0$ é

$$P_2(x) = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x - x_0)^2,$$

com $\varphi'(x_0)$ dado por (6) e $\varphi''(x_0)$ por (7).

[4] Aplicando aqui a versão $C^2$ do teorema da função implícita, o qual garante que se $F$ é de classe $C^2$ então $\varphi$ também será de classe $C^2$.