Análise Infinitesimal | 21175

Período de Realização

Decorre no dia 7 de fevereiro de 2023 entre as 10h00 e as 12h30, hora de Portugal Continental (GMT + 1.00).

Temas

Conceitos e técnicas básicas de Análise Infinitesimal e algumas das suas aplicações.

Objetivos

Na resolução de problemas aplicar conceitos e técnicas de Análise Infinitesimal, nomeadamente:

- Funções, limites e continuidade. Indução matemática e recursividade.
- Cálculo diferencial e suas aplicações.
- Cálculo integral e suas aplicações.

Enunciado dos exercícios a resolver

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com expressão

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1} + x + 1}{x^2 + 1} & x < 0 \\ x^2 - x\sin(\pi x) + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f não é contínua em $x = 0$.

b) Estude a diferenciabilidade de f indicando $D_{f'}$, o domínio da sua derivada, ou seja, o conjunto dos pontos do domínio de f onde a função é diferenciável. Indique também a expressão de f' em $D_{f'}$.

c) Calcule o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

2. Considere a função $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2$, com derivada $f'(x) = 20x^3(x-1)$.

a) Mostre que é verdadeira a seguinte afirmação: A função f tem, no máximo, uma raiz em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$.

b) Recorrendo, se necessário, à afirmação da alínea anterior, mostre que f tem exactamente uma raiz e que esta se encontra no intervalo $]-\infty, 0[$.

3. Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real:

a) $\dfrac{1}{2x^2+1} + e^x \cos(5e^x) - x^3$.

b) $(3x+5)e^{-3x}$.

4. Calcule a área da região definida por

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1 \, , \ \ 0 \leq y \leq \frac{1+x^2}{1+x}\right\}.$$

Recursos

O e-fólio Global é um trabalho individual. Pode utilizar o material disponível na plataforma, nomeadamente:

- P. M. Duarte, Notas de Cálculo para Informática, e
- Notas - Regra de Cauchy, para substituir a secção 9.1 (nas págs. 117 e 118) das notas de P. M. Duarte.

Critérios de avaliação e cotação

Resolver os exercícios propostos, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas. Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios:

- rigor científico e formal no uso de conceitos e de resultados,
- correcção dos cálculos,
- clareza e coerência na resolução dos problemas,
- adequada justificação e completude das respostas.

O e-fólio Global está cotado para 12 valores, segundo a distribuição:

questão	**1.a)**	**1.b)**	**1.c)**	**2.a)**	**2.b)**	**3.a)**	**3.b)**	**4.**	total
cotação	1 val.	1 val.	1 val.	1 val.	1 val.	2 val.	2 val.	3 val.	12 valores

Normas a respeitar

Pode redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma ou num outro formato, desde que preencha todos os dados do cabeçalho.

O seu E-fólio Global não deve ultrapassar 10 páginas A4 e todas as páginas do documento devem ser numeradas.

A resolução pode ser manuscrita desde que de uma forma clara e totalmente legível. Tome especial atenção com a digitalização de partes manuscritas de forma a garantir a sua legibilidade.

Não é permitido o uso de computador ou máquina de calcular gráfica para traçar gráficos, nem para o cálculo de limites.

Todas as resoluções devem ser realizadas de forma puramente analítica. Nos casos em que a resposta seja um valor numérico, este deverá ser apresentado de forma exacta, e não apresentada apenas uma aproximação numérica desse valor exacto.

Os problemas que constam desta prova apenas proderão ser resolvidos usando resultados descritos ou usados no manual adoptado (Notas de Cálculo para Informática) e das Notas - Regra de Cauchy, que substituem a secção 9.1 nas págs. 117 e 118 das notas de P. M. Duarte (disponíveis na plataforma).

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio e do código da disciplina, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioGlobal-21175.

Deve carregar o referido ficheiro em formato pdf para a plataforma no dispositivo E-fólio Global até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas. Apenas serão avaliadas as provas submetidas dentro do prazo e através do dispositivo E-fólio Global.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Eliana Manuel Pinho, Michael Rothwell e Clarence Protin

FIM