

Grupo IV – Representação de Curvas, Superfícies e Sólidos**6. Representação de Curvas**

6.1. Dada a matriz de coeficientes geométricos **B** obtenha os vectores coeficientes algébricos **a**, **b**, **c** e **d** sendo que

$$\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z], \ \mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z], \ \mathbf{c} = [c_x \ c_y \ c_z], \ \mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z].$$

Apresente todos os cálculos e matrize(s) utilizada(s). (2.0)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

R:

6.1.)

Temos que $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{B}$ sendo que **M** é a Matriz de Transformação Universal.

Tendo ainda que:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d}]^T = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Logo basta resolver por cálculo vectorial a expressão:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 8 \\ -5 & 13 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = [3 \ -9 \ 8]; \ \mathbf{b} = [-5 \ 13 \ -11]; \ \mathbf{c} = [1 \ 0 \ 2]; \ \mathbf{d} = [1 \ 0 \ 1]$$

6.2. Admita que temos as seguintes funções de mistura Bézier.

$$B_0 = -2u + 6$$

$$B_1 = 2u^2 + 5u - 3$$

$$B_2 = -2u^2 - 3u - 2 \quad \text{com } u \in [0, 1].$$

Sendo os três pontos de controlo $\mathbf{P}_0 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{P}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{P}_2 = (-3, 1, 0)$ calcule o ponto $\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z)$ da curva Bézier em $u = 0.25$

R:

Vamos recorrer ao cálculo matricial referente a Bézier de grau 2 (quadráticas), que são controladas por 3 pontos tal que:

$$p(u) = UMP \text{ em que } U = [u^2 \ u \ 1]; M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } P = [P_0 \ P_1 \ P_2]^T$$

Assim vem que:

$$p(u) = [u^2 \ u \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = [u^2 \ u \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se substituirmos por $u = 1$ vem:

Veja-se que esta expressão permite obter qualquer ponto da curva com $u \in [0,1]$. Seja $u = 0.25 = \frac{1}{4}$

$$p\left(u = \frac{1}{4}\right) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 \ \frac{1}{4} \ 1\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\frac{1}{16} \ \frac{1}{4} \ 1\right] \cdot \begin{bmatrix} -20 & 6 & 2 \\ 16 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\left(-\frac{20}{16} + 3\right) \left(\frac{6}{16} - \frac{3}{4} - 2\right) \left(\frac{2}{16} - \frac{3}{4} + 1\right)\right] = \left[\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{19}{8}\right)\right]$$

7. Representação de Superfícies

Apresente as principais características das superfícies de Bézier quanto à apetência técnica para a implementação computacional e a qualidade final das superfícies geradas relativamente à suavidade e facilidade de edição.

R:

As superfícies Bézier são construídas a partir de malhas de curvas Bézier e portanto herdam as características computacionais destas curvas.

Vamos analisar as curvas Bézier, restringindo as de grau 3 que envolvem polinómios até ao terceiro grau já que são estas as que são mais utilizadas nas aplicações de computação gráfica, pois acarretam 4 pontos de controlo e permitem construir uma grande variedade de curvas:

- Para curvas maiores é possível (e recomendável) segmentar estas em pequenas curvas de grau 3, que são tratadas individualmente.
- Recorre a cálculo matricial (grande apetência computacional).
- Assegura continuidade C^1 nos pontos de junção das curvas / ou das malhas no caso das superfícies.
- São bastante utilizados em programas de desenho 2D e 3D, específicos.

Inconvenientes:

- Não assegura, em geral, continuidade C^2 , nos pontos de junção o que leva a que curvas complexas não possam ser construídas com elevada suavidade (ex. rostos humanos).
- Requer 4 ou 7 ou 10 ou 13 ... (1 + um múltiplo de 3) pontos;
- Nem todos os pontos têm comportamento semelhante, o que impõe um inconveniente na interface com o utilizador, pois invariámos de interpolação para aproximação, aproximação, interpolação, etc.

Apesar de existirem soluções técnicas para corrigir pontualmente os problemas apontados a superfícies Bézier não são de fácil edição e não asseguram continuidade C^2 (ou superiores) critério essencial para se obterem superfícies de elevada suavidade.

(ver transp. docente, cap. VI(a))

8. Representação de Objectos

8.1. Descreva a técnica de representação de sólidos denominada “por varrimento” (*sweep* em inglês)

8.2. Apresente 1 exemplo de sólido passível de ser representado computacionalmente por esta técnica.

8.3. Apresente 1 exemplo de sólido que dificilmente poderia ser representado por esta técnica.

8.1)

R:

A técnica de representação de sólidos denominada “por varrimento” (*sweep* em inglês) explora a geração de um volume através da rotação, translação, projecção ou seguimento por um trajectória conhecida de uma área bidimensional.

Por exemplo, rodando uma área rectangular ao longo de uma das suas arestas obtém-se um cilindro.

Desta forma não é necessário indicar todo o volume do objecto / sólido que se quer representar mas apenas referir qual a área base e o movimento a executar ao mesmo.

8.2)

R:

Um exemplo de sólido obtido por varrimento é por exemplo o cilindro gerado pela rotação de uma área rectangular tomando uma das suas arestas como eixo de rotação.

8.3)

R:

Qualquer volume que não possa ser obtido por rotação, translação ou projecção ou seguimento de uma trajectória pré-definida, dificilmente poderá ser representado por esta técnica.

Um exemplo deste tipo de sólido é por exemplo um busto humano.