E-fólio B

ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Grupo I

1.
Uma matriz 3×3 com característica igual a 3 é invertível e portanto a resposta certa é **d)**.

2. O subespaço F é gerado pelos vetores linearmente independentes $(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)$ e portanto a resposta certa é **c)**.

3. Se 3 é valor próprio de A então existe um vetor $u \neq 0$ tal que $Au = 3u$; se 4 é valor próprio de A então existe um vetor $v \neq 0$ tal que $Av = 4v$, e portanto $Au + Av = 3u + 4v$. Logo a resposta certa é **a)**.

4.
Sejam α e β tais que $\alpha(u+v)+\beta(u-v)=0$. Então $(\alpha+\beta)u+(\alpha-\beta)v=0$. Mas como u e v são linearmente independentes os coeficientes de uma combinação linear nula são nulos, ou seja $\alpha+\beta=0$ e $\alpha-\beta=0$, ou seja $\alpha=\beta=0$, e portanto a resposta certa é **a)**.

Grupo II

Esta afirmação é falsa.
Vamos usar as matrizes do exemplo 6.26 do manual para construir matrizes semelhantes de ordem 5. A ideia é usar a matriz A de ordem 2 para os elementos $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ da nova matriz e preencher o resto da matriz com zeros. Fazendo a mesma coisa com a matriz B, obtemos assim as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B,$$

e portanto as matrizes A e B são semelhantes.
A matriz A tem os valores próprios $2,0,0,0$ e 0 e a matriz B tem os valores próprios $2,0,0,0$ e 0. Temos

$M_2(A) = \langle (-1\,1\,0\,0\,0)^\top \rangle$ e $M_0(A) = \langle (-1\,3\,0\,0\,0)^\top, (0\,0\,1\,0\,0)^\top, (0\,0\,0\,1\,0)^\top, (0\,0\,0\,0\,1)^\top \rangle$, e para a matriz B,

$$M_2(B) = \left\langle (-1\,2\,0\,0\,0)^\top \right\rangle \text{ e } M_0(B) = \left\langle (1\,0\,0\,0\,0)^\top, (0\,0\,1\,0\,0)^\top, (0\,0\,0\,1\,0)^\top, (0\,0\,0\,0\,1)^\top \right\rangle.$$

$u = (-1\,1\,0\,0\,0)^\top$ é vetor próprio de A mas $\sqrt{2}(-1\,1\,0\,0\,0)^\top$ não é vetor próprio de B, pois $u = \frac{1}{2}(-1\,2\,0\,0\,0)^\top - \frac{1}{2}(1\,0\,0\,0\,0)^\top$ e portanto

$$\begin{aligned}
B\sqrt{2}u &= \sqrt{2}Bu \\
&= \sqrt{2}B\left(\frac{1}{2}(-1\,2\,0\,0\,0)^\top - \frac{1}{2}(1\,0\,0\,0\,0)^\top\right) \\
&= \sqrt{2}\frac{1}{2}2(-1\,2\,0\,0\,0)^\top \\
&= \sqrt{2}(-1\,2\,0\,0\,0)^\top \\
&\neq \lambda(\sqrt{2}u), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Em geral se A e B são matrizes semelhantes e $B = P^{-1}AP$, então a um vetor próprio u associado a um valor próprio λ de B corresponde o vetor próprio Pu de A, com o mesmo valor próprio λ.

Grupo III

Tem-se $T(1,0,0) = x^2, T(0,1,0) = 1$ e $T(0,0,1) = x$ e portanto na base $(x^2, x, 1)$ obtemos $T(1,0,0) = (1,0,0), T(0,1,0) = (0,0,1)$ e $T(0,0,1) = (0,1,0)$. A matriz que representa T é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de A são as soluções de $\det(A - \lambda I_3) = 0$ ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0,$$

e portanto os valores próprios de A são -1 e 1. O valor próprio -1 tem multiplicidade álgébrica 1 e o valor próprio 1 tem multiplicidade álgébrica 2.

Se $\lambda = 1$ então $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, e portanto o espaço próprio associado a $\lambda = 1$ é

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -y + z = 0\right\} = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle.$$

Se $\lambda = -1$ então $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e portanto o espaço próprio associado a $\lambda = -1$ é

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = 0 \text{ e } y + z = 0\right\} = \langle (0,1,-1) \rangle.$$

Uma vez que A tem 3 vetores próprios linearmente independentes e tem dimensão 3 sabemos que A é diagonalizável e que uma matriz diagonalizante pode ser obtida usando os vetores próprios como colunas $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Para verificarmos que P diagonaliza de facto A, vejamos que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Tem-se $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Grupo IV

Tem-se $f(1,0,0) = (-1,0), f(0,1,0) = (0,1), f(0,0,1) = (1,1)$, e portanto a matriz que representa f em relação à base canónica no espaço de partida e de chegada é $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para verificarmos que $\mathscr{B}_1 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ basta mostrar que temos três vetores em $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes, para tal basta mostrar, por exemplo, que a matriz composta pelo três vetores tem determinante não nulo,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0.$$

Para verificarmos que a sequência $\mathscr{B}_2 = ((0,2),(-1,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ basta mostrar que temos dois vetores em $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes, para tal basta mostrar, por exemplo, que a matriz composta pelo dois vetores tem determinante não nulo,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \neq 0.$$

Para deterrminar a matriz que representa f em relação à base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$, basta determinar a imagem por f dos vetores da base $\mathscr{B}_1$ e escrevê-los à custa da base $\mathscr{B}_2$.

Temos que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$, e portanto a primeira coluna da matriz que representa f em relação à base $\mathscr{B}_1$ e à base $\mathscr{B}_2$ é $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De modo análogo temos que

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/2 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2} \quad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2},$$

e portanto a segunda e a terceira colunas da matriz que representa f em relação a $\mathscr{B}_1$ e a $\mathscr{B}_2$ são $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A matriz pretendida é portanto $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Grupo V

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra esta matriz tem pelo menos um valor próprio complexo λ, e esse valor próprio é não nulo (porquê?).

Seja u um vetor próprio associado ao valor próprio λ, ou seja tal que

$$Au = \lambda u.$$

Aplicando A à igualdade anterior obtemos $A(Au) = A(\lambda u)$, e portanto $A^2 u = \lambda(Au) = \lambda(\lambda u) = \lambda^2 u$ ou seja

$$A^2 u = \lambda^2 u.$$

Se aplicarmos novamente A obteremos

$$A^3 u = \lambda^3 u,$$

e é fácil ver (porquê?) que aplicando k vezes A obtemos

$$A^k u = \lambda^k u.$$

Se na igualdade anterior escolhermos $k = n$ então $A^n u = \lambda^n u$, e como $\lambda \neq 0$ (porquê?),

$$u = \frac{1}{\lambda^n} A^n u.$$

FIM