Exame 1 – Resolução

A distribuição da cotação total (20 valores) pelos oito grupos de questões é a seguinte:

Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8
Cotação Exame	1,5	2,5	3,5	2	3	3,5	2	2
Cotação P-fólio	–	2,5	–	2	3	–	2	2,5

1. Dado o modelo de mercado $\begin{cases} Q_d &= Q_s \\ Q_d &= 7 - 2P\,, \\ Q_s &= -2 + 4P \end{cases}$

calcule P^* e Q^* e represente o problema graficamente.

1.

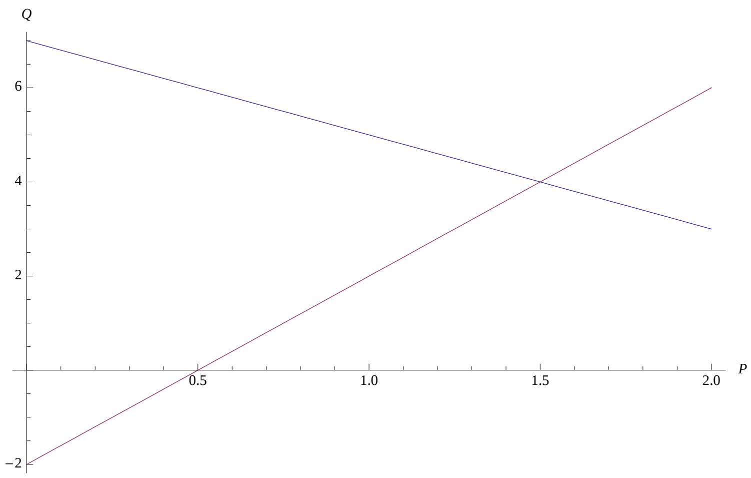

Figura 1: As rectas correspondentes à oferta ($Q_s = -2+4P$) e à procura ($Q_d = 7-2P$); o ponto de equilíbrio corresponde à intersecção das duas rectas $(P^*, Q^*) = (3/2, 4)$

Para calcular os pontos de equilíbrio usamos as equações que definem a procura Q_d e a oferta Q_s para obter os possíveis valores de P^*.
Assim temos

$$\begin{aligned} Q_d = Q_s &\Longrightarrow 7 - 2P = -2 + 4P \\ &\Longrightarrow 7 + 2 = 2P + 4P \\ &\Longrightarrow 9 = 6P \\ &\Longrightarrow P = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e portanto obtemos $P^* = 1\,\frac{1}{2}$, e substituindo em qualquer das equações temos $Q^* = 7 - 2P^*$ (ou $Q^* = -2 + 4P^*$) ou seja $Q^* = 4$.

2. Dado o modelo de mercado $\begin{cases} Q_d &= Q_s \\ Q_d &= 2 - 3P^2 \\ Q_s &= 2P - 3 \end{cases}$,

calcule P^* e Q^* e represente o problema graficamente.

2.

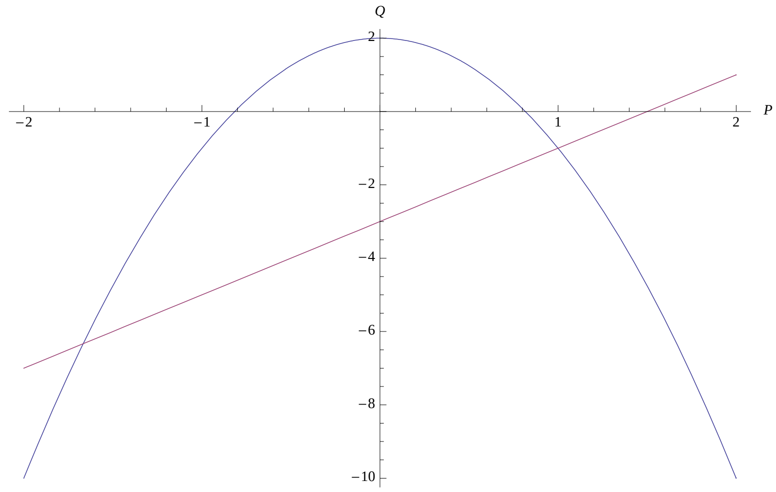

Figura 2: A recta correspondente à oferta ($Q_s = 2P - 3$) e a parábola correspondente à procura ($Q_d = 2 - 3P^2$); o ponto de equilíbrio corresponde à intersecção da recta e da parábola com P^* positivo $(P^*, Q^*) = (1, -1)$

Como no caso anterior para calcular os pontos de equilíbrio usamos as equações que definem a procura Q_d e a oferta Q_s para obter os possíveis valores de P^*.
Assim temos

$$\begin{aligned} Q_d = Q_s &\Longrightarrow 2P - 3 = 2 - 3P^2 \\ &\Longrightarrow 3P^2 + 2P - 5 = 0 \\ &\Longrightarrow (3P+5)(P-1) = 0 \Longrightarrow P = -\frac{5}{3} \text{ ou } P = 1. \end{aligned}$$

E portanto neste caso temos 2 valores possíveis para P^*. Mas como por definição P^* representa um preço, só os valores positivos de P^* é que fazem sentido logo a única solução possível é $P^* = 1$, a que corresponde $Q^* = 2P^* - 3 = -1$. O facto de obtermos um valor de $Q^* < 0$ mostra que este modelo não é muito realista!

3. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a. indique justificadamente todos os produtos de duas matrizes que estão definidos;

b. calcule todos os possíveis produtos. (*se não resolveu a alínea anterior calcule BC e CB.*)

3.

a.

Dada uma matriz com m linhas e n colunas, ou seja uma matriz $m \times n$ (lê-se “m por n”), é possível multiplicá-la à esquerda por uma matriz com m colunas e à direita por uma matriz com n linhas. Neste caso A é uma matriz 3×3, ou seja com 3 linhas e 3 colunas, B é uma matriz 3×1, ou seja com 3 linhas e 1 coluna, C é uma matriz 1×3, ou seja com 1 linha e 3 colunas, e D é uma matriz 2×3, ou seja com 2 linhas e 3 colunas, portanto os únicos produtos possíveis são AB, BC, CA, CB, DA e DB.

b. Calculando os 6 possíveis produtos obtem-se:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 \\ 12+12 \\ 21+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ 39 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \; CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \end{pmatrix},$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, \; DA = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 47 & 60 \\ 20 & 28 & 36 \end{pmatrix},$$

$$\text{e finalmente } DB = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

4.

Dada a matriz $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcule o determinante de L.

4.

Reparando que a 2ª e a 4ª linhas são iguais era possível concluir que o determinante era igual a 0, argumentando que as linhas eram linearmente dependentes. Caso contrário a maneira mais eficaz é utilizar a 2ª linha pois tem um único elemento não nulo, obtendo-se

$$\begin{aligned} |L| &= -\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(24-16) + 2(20-8) - 4(10-6) \\ &= -8 + 24 - 16 \\ &= 0. \end{aligned}$$

5. Dada a função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, seja $u = F\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-x}{xz}\right)$. Mostre que $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

5.
Neste exercício não sabemos como é que a função F está definida, mas no entanto vamos ver que as derivadas parciais de u verificam a relação pedida.
Sejam A e B as variáveis (*mudas*) associadas à função F, ou seja

$$u = F(A,B) = F\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right).$$

Então pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial z}.$$

Neste caso $A = \dfrac{y-x}{xy} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ e $B = \dfrac{z-x}{xz} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z}$, e portanto obtemos:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}.$$

E portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial B}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right).$$

E juntando estes termos todos obtemos

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial B}\right) + \frac{y^2}{y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right) + \frac{z^2}{z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right) = 0.$$

6. Dada a função $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$,

a. determine o domínio de g;

b. calcule as derivadas parciais de g em ordem a x, y e z;

c. calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}$.

6.

a.

O domínio da função g corresponde aos pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que o denominador não se anula,

$$D_g = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z \neq 0\right\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,-x-y)\colon x,y \in \mathbb{R}\}.$$

b.

Por definição para calcularmos a derivada parcial de g em ordem a x consideramos as outras variáveis fixas, neste caso y e z, e derivamos em ordem a x, ou seja:

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right) = \frac{yz(x+y+z) - xyz}{(x+y+z)^2} = \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2},$$

e análogamente para a derivada parcial de g em ordem a y: consideramos as variáveis x e z fixas e derivamos em ordem a y:

$$g_y = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right) = \frac{xz(x+y+z) - xyz}{(x+y+z)^2} = \frac{xz(x+z)}{(x+y+z)^2}.$$

Para a derivada parcial de g em ordem a z: consideramos as variáveis x e y fixas e derivamos em ordem a z:

$$g_z = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right) = \frac{xy(x+y+z) - xyz}{(x+y+z)^2} = \frac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2}.$$

c.

Por definição

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2}\right) = \frac{y\left(xy+2xz+yz+y^2\right)}{(x+y+z)^3}.$$

Embora as derivadas parciais de *primeira* ordem tenham sido estudadas, o mesmo não se passa com as de *segunda* ordem. Assim sendo a cotação desta alínea foi *absorvida* pelas restantes.

7. Determine os valores estacionários da função $f(x) = x^4 - 4x^2$, e verifique se são máximos ou mínimos relativos, ou pontos de inflexão.

7.

Como $f(x) = x^4 - 4x^2$, temos $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$.
Os pontos estacionários são as soluções da equação $f'(x) = 0$ e portanto

$$f'(x) = 0 \iff 4x(x^2-2) \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 2 \iff x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2}.$$

Para sabermos mais alguma coisa sobre estes pontos temos de saber o sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 8 = 4(3x^2-2) \Rightarrow f''(0) = -8 < 0 \text{ e } f''(\pm\sqrt{2}) = 4(3\cdot 2 - 2) = 16 > 0,$$

e portanto concluímos que o ponto 0 corresponde a um máximo local, onde $f(0) = 0$, e os pontos $\pm\sqrt{2}$ correspondem a pontos de minímo locais, onde $f(\pm\sqrt{2}) = -4$. Neste caso pode mostrar-se que os pontos $\pm\sqrt{2}$ correspondem a pontos de minímo absoluto, ou seja $f(x) \geqslant f(\pm\sqrt{2}) = -4$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

8. Determine os três primeiros termos da série de MacLaurin da função $f\colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.
(*A série de MacLaurin corresponde à série de Taylor em torno do ponto* $x = 0$.)

8.

Para calcularmos os três primeiros termos da série de MacLaurin precisamos de calcular o valor da função e das duas primeiras derivadas em $x_0 = 0$. Tem-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{x+1} \Longrightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= \frac{xe^x}{(x+1)^2} \Longrightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3} \Longrightarrow f''(0) = 1. \end{aligned}$$

e portanto utilizando a fórmula de Taylor obtemos os três primeiros termos $1+0+x^2/2$, ou seja numa vizinhança da origem podemos aproximar a função $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ por $1 + \dfrac{x^2}{2}$.