Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre dia 8 de Junho de 2020, das 10:00 às 13:00

Data de Limite de Entrega

8 de Junho de 2020, até às 13h00 de Portugal Continental

Tema

Programação linear, filas de espera, gestão de processos, simulação

Competências

Deve demonstrar ter capacidade para aplicar na resolução de problemas os vários métodos estudados nos temas acima.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os exercícios propostos no enunciado, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Enunciado

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

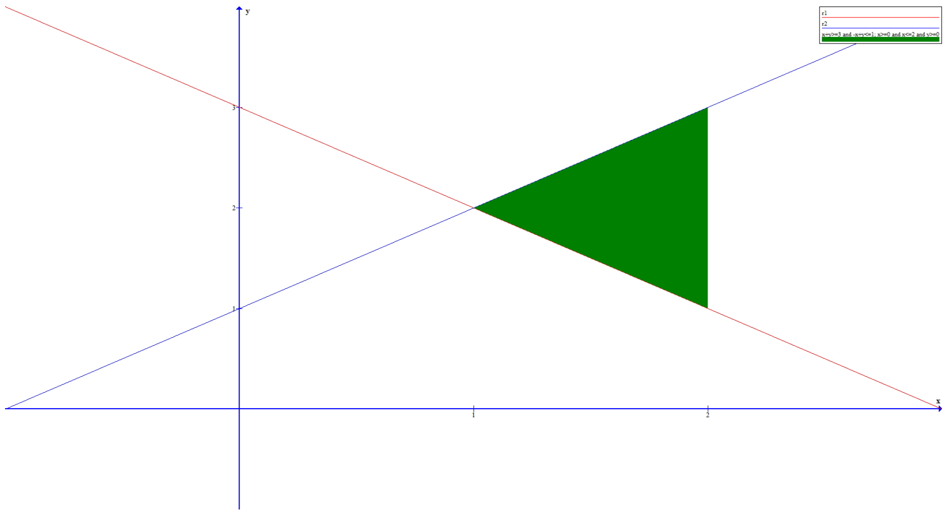
1 (4 val.) Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max F = X + 2Y$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} X + Y \geq 3 \\ -X + Y \leq 1 \\ X \leq 2 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva-o graficamente, justificando todos os passos (determinação de todas as restrições, intersecção das restrições, curvas de nível da função objectivo, sentido de crescimento da função objectivo, determinação de ponto(s) óptimo(s),...).

Resolução:
O primeiro passo para resolver o problema pelo método gráfico é desenhar o polígono admissível, tendo em conta as restrições. Tendo em conta que $X, Y \geq 0$, o polígono admissível encontra-se no primeiro quadrante.
A recta correspondente à primeira restrição é $X+Y = 3 \Leftrightarrow Y = -X+3$, ou seja é a recta de declive -1 (paralela à bissectriz dos quadrantes pares) que intersecta o eixo vertical no ponto $(0, 3)$. Como a primeira restrição é equivalente a $Y \geq -X+3$, estamos interessados no semiplano acima da recta $Y = -X + 3$.
A recta correspondente à segunda restrição é dada pela equação $-X+Y = 1 \Leftrightarrow Y = X + 1$, ou seja, é a recta de declive 1 (paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares) que cruza o eixo vertical no ponto $(0, 1)$. Como a segunda restrição é equivalente a $Y \leq X + 1$, estamos interessados no semiplano abaixo da recta $Y = X + 1$.
A terceira restrição corresponde ao semiplano à esquerda da recta vertical que passa no ponto $(2, 0)$.
Assim, o polígono admissível é a região do primeiro quadrante que resulta da intersecção do semiplano acima da recta $Y = -X + 3$ com o semiplano abaixo da recta $Y = X + 1$ e com o semiplano à esquerda da recta vertical $X = 2$.



Para descobrir o ponto(s) do polígono admissível onde F assume o valor máximo, temos de perceber quais são as curvas de nível de F e em que sentido cresce.

Curvas de nível de F (com $c \in \mathbb{R}$ constante):

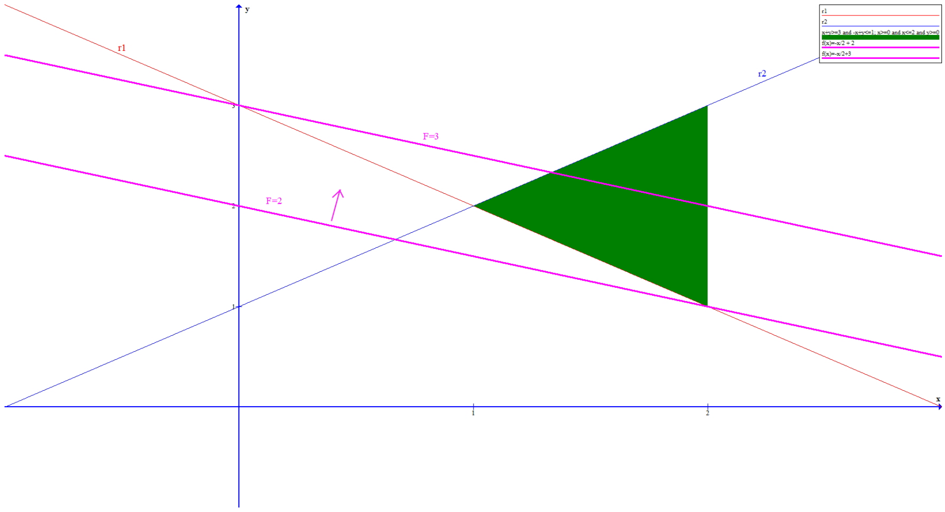
$$F(X, Y) = c \Leftrightarrow X + 2Y = c \Leftrightarrow Y = -\frac{X}{2} + \frac{c}{2}$$

Assim, as rectas de nível da função F são as rectas de declive $-1/2$. Pela expressão da função F, à medida que o valor de Y aumenta, sai que o valor de F aumenta. Assim, no gráfico seguinte, representa-se a violeta duas rectas de nível de F, assim como o sentido de crescimento.

Assim, pelo sentido de crescimento da função F, percebe-se facilmente que o ponto do polígono em que a função F assume o valor mais elevado é o ponto na intersecção das rectas correspondentes às restrições 2 e 3.

$$\begin{cases} -X + Y = 1 \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + Y = 1 \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 3 \\ X = 2 \end{cases}$$

Assim, o ponto óptimo é o ponto $(2, 3)$, correspondente a $X^* = 2$ e $Y^* = 3$ e em que o valor máximo de F é $F^* = 2 + 2 \times 3 = 8$.



b) Utilize o método do simplex para resolver o problema, indicando o método utilizado e justificando o porquê da escolha. Justifique cuidadosamente todos os cálculos.
Argumente, justificando qual dos metódos (entre o método gráfico ou o método do simplex escolhido) usaria para resolver um problema de programação linear semelhante com 4 variáveis de decisão.

Resolução:

Problema na forma standard:

$$\max F = X + 2Y + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 - M\alpha$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} X + Y - F_1 + \alpha = 3 \\ -X + Y + F_2 = 1 \\ X + F_3 = 2 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Como o problema tem uma desigualdade $\geq$, na forma standard, além das variáveis de folga, acrescentou-se uma variável artificial α. O problema vai ser resolvido pelo Método da base artificial, mas também poderia ser resolvido pelo Método das duas fases.

operação	base	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ_i
		1	1	-1	0	0	1	3	
	F_2	-1	1	0	1	0	0	1	
	F_3	1	0	0	0	1	0	2	
	F	-1	-2	0	0	0	M		
	α	1	1	-1	0	0	1	3	3
	F_2	-1	1	0	1	0	0	1	1 $\leftarrow$
	F_3	1	0	0	0	1	0	2	—
	F	-1-M	-2-M	M	0	0	0	-3M	
			$\uparrow$						
$l_1 - l_2$	α	2	0	-1	-1	0	1	2	1 $\leftarrow$
	Y	-1	1	0	1	0	0	1	—
	F_3	1	0	0	0	1	0	2	2
$(2+M)l_2 + l_4$	F	-3-2M	0	M	2+M	0	0	2-2M	
		$\uparrow$							
$\frac{1}{2}l_1$	X	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	—
$l_2 + \frac{1}{2}l_1$	Y	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	—
$-\frac{1}{2}l_1 + l_3$	F_3	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	2 $\leftarrow$
$(3+2M)\frac{1}{2}l_1 + l_4$	F	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$+M	5	
				$\uparrow$					
$l_3 + l_1$	X	1	0	0	0	1	0	2	
$l_3 + l_2$	Y	0	1	0	1	1	0	3	
$2l_3$	F_1	0	0	1	1	2	-1	2	
$3l_3 + l_4$	F	0	0	0	2	3	M	8	

Como na linha da função F já não há valores negativos, o método do simplex termina, tendo sido obtido o valor máximo de F, $F^* = 8$, quando $X^* = 2$, $Y^* = 3$ e $F_1^* = 2$.
Note-se que o valor na linha de F correspondente às variáveis de folga F_2 e F_3 (variáveis não básicas) é não nulo. Assim, temos a garantia que a solução óptima é única.

Se tivéssemos de resolver um problema semelhante com 4 variáveis de decisão, teríamos de optar pelo método do simplex, uma vez que o método gráfico apenas permite resolver problemas lineares com 2 variáveis de decisão.

2 (3 val.) Uma linha de atendimento telefónico do supermercado *Fruta Fresca* tem ao serviço um único operador que trabalha 6 horas por dia para satisfazer pedidos e prestar informações. Sempre que determinado cliente esteja a ser atendido pelo operador, as restantes chamadas existentes em linha são colocadas em espera até serem atendidas por ordem de chegada. Atualmente, a linha de apoio ao cliente recebe, em média, 20 chamadas por hora e o tempo médio de atendimento de cada chamada pelo operador é de 2 minutos. Considere que as chamadas entram em linha de acordo com um Processo de Poisson e que o tempo de atendimento de cada uma delas pelo operador segue uma distribuição Exponencial Negativa.

a) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado, justificando detalhadamente a caracterização.

   Resolução:
   Trata-se de um sistema $M/M/1$ (População=∞, Fila máxima=∞) porque tanto o processo de chegada de clientes como o tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos. O número de servidores é 1 porque tem apenas um operador a atender as chamadas.
   Processo de chegada Poissoniano com uma taxa de chegadas $\lambda = \frac{1}{3}$ chamadas por minuto (1 chamada de 3 em 3 minutos, ou 20 chamadas por hora).
   Duração do serviço com distribuição Exponencial Negativa com taxa de atendimento de $\mu = \frac{1}{2}$ chamadas por minuto (2 minutos por chamada).
   População de chamadas ilimitada.
   Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

b) Determine o tempo, em média, que cada chamada demora a ser atendida pelo operador.

   Resolução:
   Na alínea anterior vimos que $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\mu = \frac{1}{2}$. Logo

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} < 1$$

   Assim, podemos calcular o tempo médio de espera para o atendimento.

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 4$$

   Assim, o tempo médio de espera para cada chamada ser atendida é de 4 minutos.

c) Qual o número médio de chamadas existentes em linha (espera + atendimento)?

Resolução:
O número médio de chamadas em linha (espera + atendimento) é dado por L.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2$$

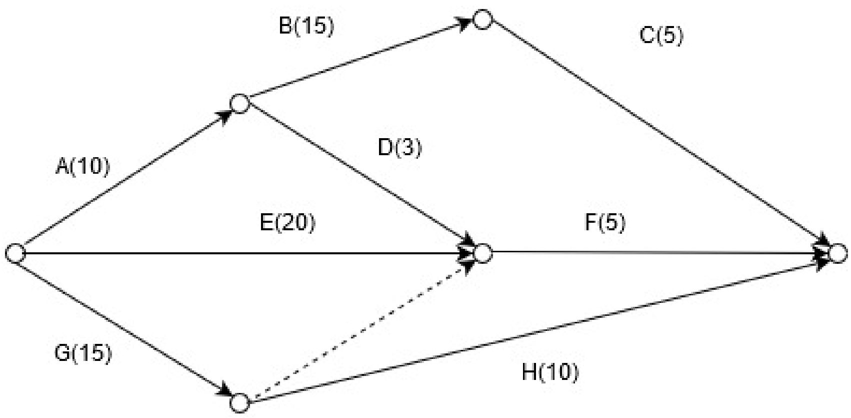
Assim, existem em média 2 chamadas em linha.

3 (2 val.)
Considere o projecto com as características indicadas no quadro seguinte.

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
A	—	10
B	A	15
C	B	5
D	A	3
E	—	20
F	D, E, G	5
G	—	15
H	G	10

a) Esboce a rede do projecto.

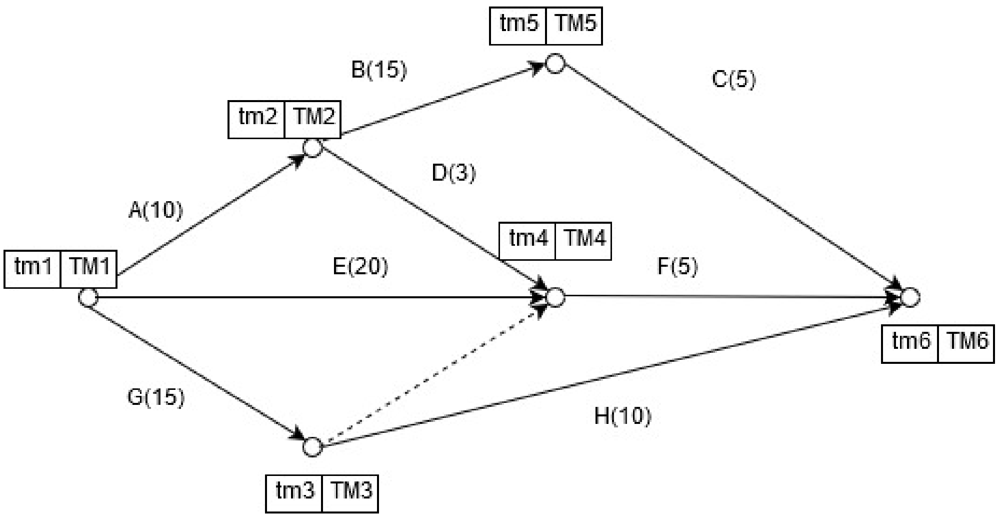
Resolução:



Como as actividades A, E e G não têm precedências, saem do nó inicial. A partir do fim da actividade A saem as actividades B e D que são as únicas que têm a actividade A como precedente. Do final das actividades D, E e G sai a actividade F, que tem como precedentes D, E e G. A partir da actividade G sai também a actividade H cujo único precedente é G. E de B sai a actividade C cjuo único precedente é B. As actividades C, F e H vão ter ao nó final, pois não são precedência de nenhuma outra actividade.

b) Determine o caminho crítico do projecto e indique a duração total do projecto. Justifique todos os cálculos que realizar.

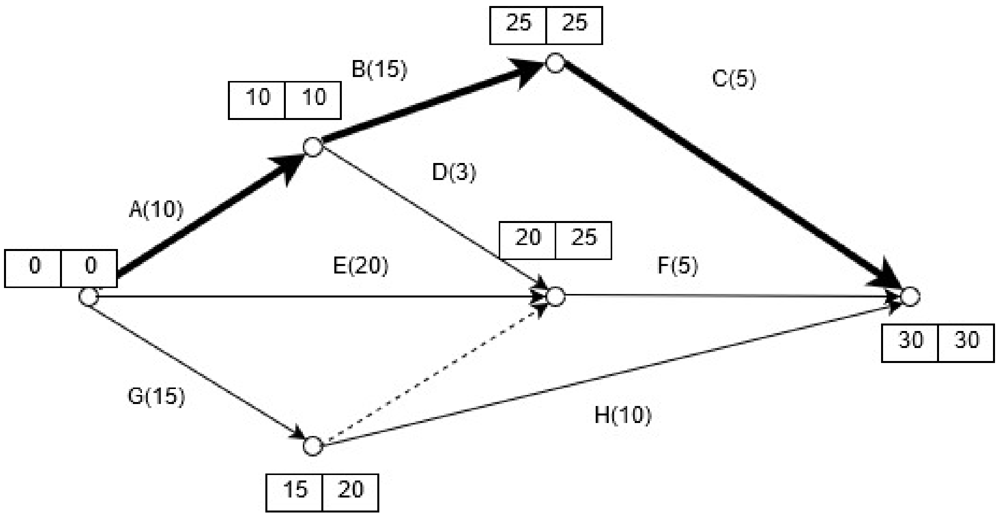
Resolução:



Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 10 = 10$
$tm_3 = tm_1 + 15 = 15$
$tm_4 = \max\{tm_2 + 3, tm_1 + 20, tm_3\} = \max\{13, 20, 15\} = 20$
$tm_5 = tm_2 + 15 = 25$
$tm_6 = \max\{tm_5 + 5, tm_4 + 5, tm_3 + 10\} = \max\{30, 25, 25\} = 30$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_8 = 30$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_4 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_3 = \min\{TM_4, TM_6 - 10\} = \min\{25, 20\} = 20$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 15, TM_4 - 3\} = \min\{10, 22\} = 10$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 10, TM_4 - 20, TM_3 - 15\} = \min\{0, 5, 5\} = 0$



Conclui-se que o caminho crítico é composto pelas actividades A, B e C. A duração total do projecto é 30 unidades de tempo.

4 (3 val.) O tempo de entrega (em semanas) de um certo produto (em centenas de unidades) adquirido online é dado pela variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4} \\ 0, & x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com a distribuição X, ou seja, que permita simular o tempo de entrega do produto em causa, recorrendo ao Método da Inversão. Apresente o fluxograma associado.

Resolução:

Sendo dada a função densidade de probabilidade, teremos de calcular a função distribuição de probabilidade.

Para $x < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para $0 \leq x < \frac{1}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\,dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt = \\ &= 0 + \left[t^2\right]_0^x = \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Para $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4}$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_X(t) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f_X(t)\,dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2t\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x} 1\,dt = \\ &= 0 + \left[t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + [t]_{\frac{1}{2}}^{x} = \\ &= \frac{1}{4} + x - \frac{1}{2} = \\ &= x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Para $x \geq \frac{5}{4}$, tem-se

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_X(t) + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} f_X(t)\, dt + \int_{\frac{5}{4}}^{x} f_X(t)\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2t\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} 1\, dt + \int_{\frac{5}{4}}^{x} 0\, dt = \\
&= 0 + \left[t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + [t]_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} + 0 = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4} \\ 1, & x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$

Assim, gerando um número pseudo-aleatório $u \in [0, 1]$, teremos o seguinte.

Se $u \leq F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ (isto é para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$), teremos de inverter a expressão $u = x^2$:

$$u = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{u}.$$

Como $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, temos que $x \geq 0$ e portanto $x = \sqrt{u}$.

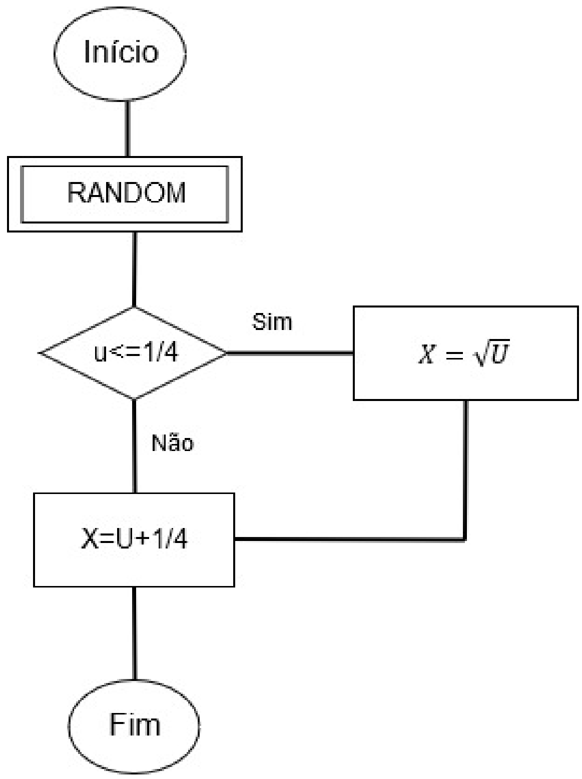
Se $F_X\left(\frac{1}{2}\right) \leq u \leq F_X\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq u \leq 1$ (isto é, para $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$), teremos de inverter a ecpressão $u = x - \frac{1}{4}$:

$$u = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = u + \frac{1}{4}.$$

Assim, gerada a variável pseudo-aleatória $U \in [0, 1]$, obtemos a variável pseudo-aleatória X com a distribuição pretendida.

$$NPAX = \begin{cases} \sqrt{U}, & U \leq \frac{1}{4} \\ U + \frac{1}{4} & U > \frac{1}{4} \end{cases}$$

E temos o fluxograma associado.



FIM