E-fólio A | Instruções para a realização do E-fólio

Investigação Operacional | 21076

Nome: Pedro Pereira Santos

N^{0} de Estudante: 2000809

Curso: Licenciatura em Eng. Informática **Turma:** 2

Data: 03/04/2023 **Ano Lectivo:** 2022/23

Docentes: Patrícia Engrácia, Elsa Negas e Clarence Protin

Resolução:

1.

Variáveis de decisão:
Para as variáveis de decisão, temos as variáveis que servem para calcular a função objetivo, que é maximizar o lucro das escavações, sendo estas a quantidade de terra e areia escavada, com unidade base de $1000m^3$.
Temos então:

X: quantidade de terra escavada semanalmente (vezes $1000m^3$)
Y: quantidade de areia escavada semanalmente (vezes $1000m^3$)

Função objetivo:
A função objetivo, como dito anteriormente, tem o objetivo de maximizar o lucro da empresa. Temos então a função objetivo de maximizar (lucro) de:

$$F(X,Y) = 57X + 60Y$$

Restrições:
As restrições são os limites, inferiores ou superiores, da área de soluções possíveis, dependendo dos recursos que temos disponíveis. Temos, então, as restrições:

$8X + 4Y \leq 40$: "Horas trabalhadas pela máquina A, sabendo que, semanalmente, dispomos de 40 de trabalho para a utilizar."

$4X + 5Y \leq 40$: "Horas trabalhadas pela máquina B, sabendo que, semanalmente, dispomos de 40 de trabalho para a utilizar."

$50X + 13Y \leq 40*5$: "Horas trabalhadas pelos trabalhadores, sabendo que, semanalmente, dispomos de 40 de trabalho, por cada um dos 5 trabalhadores, para utilizar, obtendo assim um total de 200 horas disponíveis."

$X, Y \geq 0$: Condições de não negatividade.

Posto isto, podemos formalizar o problema da seguinte forma:

Max $F = 57X + 60Y$

Sujeito a:

$$8X + 4Y \leq 40$$
$$4X + 5Y \leq 40$$
$$50X + 13Y \leq 200$$

$$X, Y \geq 0$$

2.

a)

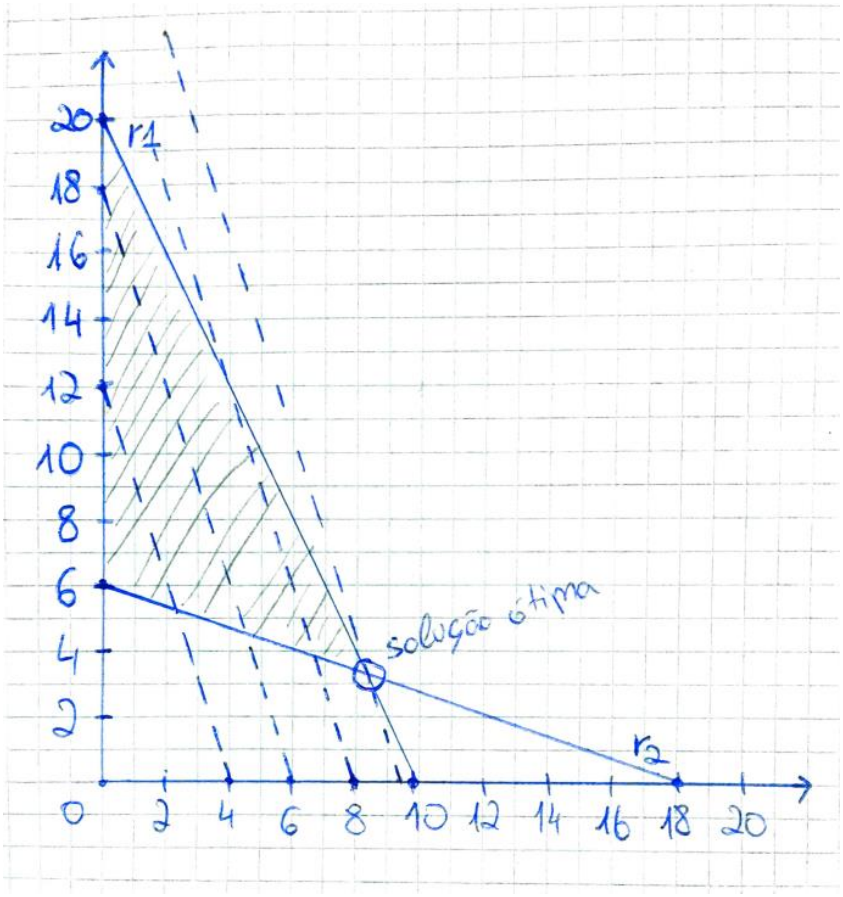
Desenhamos o gráfico, tendo em conta as restrições:

A reta 1 (r1) 2X + Y = 20 <=> Y = 20 – 2X passa nos pontos (0,20) e (10,0)
A reta 2 (r2) X + 3Y = 18 <=> Y = 6 – $\frac{X}{3}$ passa nos pontos (0,6) e (18,0)

A zona sombreada (com traços) é a área de soluções possíveis, pois temos que valores têm de estar abaixo da reta 1 (r1), inclusive, por ter uma restrição ser "≤" (menor ou igual), e acima da reta 2 (r2) pela restrição ser "≥" (maior ou igual).

As retas a tracejado são as retas da Função Objetivo, movendo-se para a direita, uma vez que o objetivo é maximizar a função.

Temos, então, o gráfico referente ao problema de PL:



As retas de nível da função são dadas pelas retas 3X + Y = z para algum z ∈ ℝ, ou seja,

$$Y = -3X + z$$

Assim, o valor da função F aumenta à medida que o valor de z aumenta.

Posto isto, conseguimos observar, que ao deslocar-se para a direita, o ponto ótimo da solução ótima é o ponto da intersecção das retas r1 e r2.

$$\begin{cases} 2X + Y = 20 \\ X + 3Y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 20 - 2X \\ X + 3(20 - 2X) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ X + 60 - 6X = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

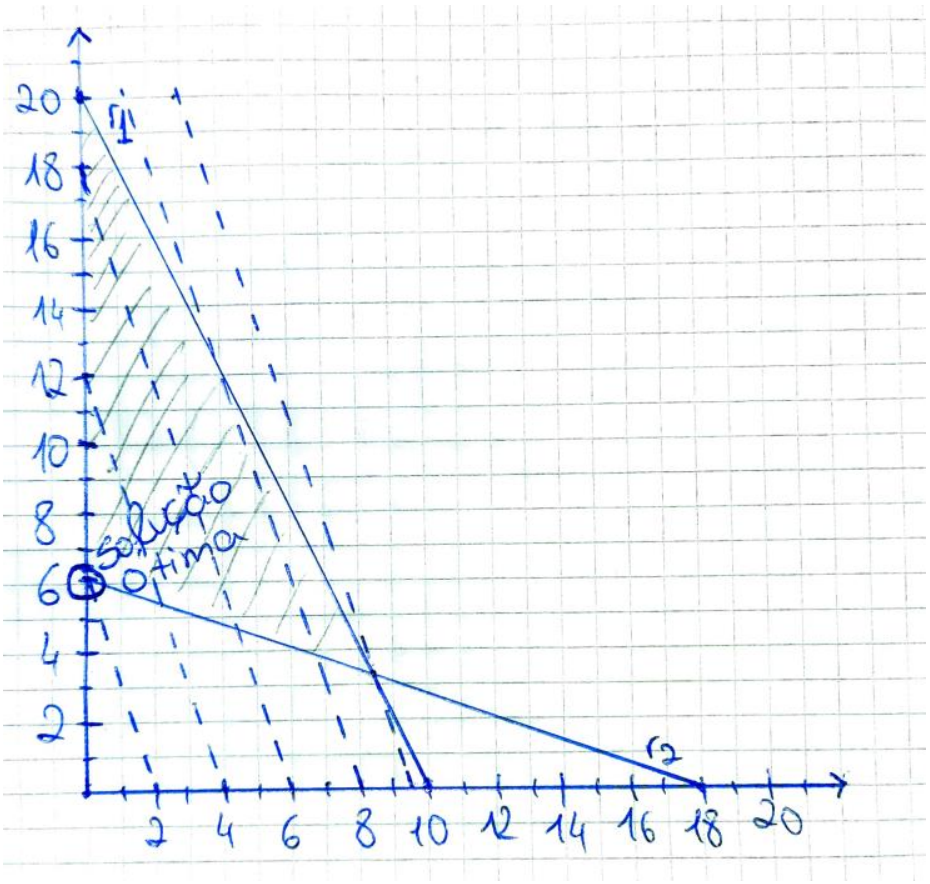
$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ -5X = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 20 - 2 * \frac{42}{5} \\ X = \frac{42}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{16}{5} \\ X = \frac{42}{5} \end{cases}$$

Logo, temos:
(X*,Y*) = $\left(\frac{42}{5}, \frac{16}{5}\right)$

Com F* = F(X*,Y*) = $3 * \frac{42}{5} + \frac{16}{5} = \frac{142}{5}$

Assim, a solução ótima do problema é $\frac{142}{5}$.

b)



Podemos ver, que neste caso a solução ótima não é a mesma.
Da mesma maneira que na alínea anterior, temos:

As retas de nível da função são dadas pelas retas 3X + Y = z para algum z ∈ ℝ, ou seja,

$$Y = -3X + z$$

Assim, o valor da função F diminui à medida que o valor de z diminui.

Neste caso, como queremos minimizar a função, as retas da Função Objetivo (retas a tracejado) movem-se para a esquerda, desde o ponto máximo à direita.

Posto isto, podemos observar que o ponto ótimo da solução ótima é o ponto onde a reta 2 (r2) intersecta com o eixo dos YY.

Temos então, segundo dados já calculados na alínea anterior, que:

$(X^*,Y^*) = (0,6)$

Com $F^* = F(X^*,Y^*) = 3*0 + 6 = 6$

Assim, a nova solução ótima é 6.

c)

Para resolver pelo método Simplex, temos de meter o problema na Forma Padrão.

Temos então a Forma Padrão:

Max $F = 3X + Y$

Sujeito a

$$2X + Y + F1 = 20$$
$$X + 3Y - F2 + \alpha = 18$$

$X,Y,F1,F2,\alpha \geq 0$ (α – variável artificial)

1ª Fase:

Para resolver este problema de PL, primeiro temos de resolver o seguinte problema de PL auxiliar, para poder retirar a variável artificial:

Min $F' = \alpha$

Sujeito a

$$2X + Y + F1 = 20$$
$$X + 3Y - F2 + \alpha = 18$$

$X,Y,F1,F2,\alpha \geq 0$ (α – variável artificial)

Como Min F' = α <=> Max F' = -α , temos então a representação tabular deste "problema artificial":

base	X	Y	F1	F2	α	T.I.
F1	2	1	1	0	0	20
α	1	3	0	-1	1	18
-F'	0	0	0	0	1	0

Como α é variável básica mas o valor em -F' não é nulo, temos de anular esse valor, fazendo-o de forma fácil "multiplicando" a 2ª linha por -1 e "somando-a" à 3ª linha.

Posto isto, obtemos, então:

	base	X	Y	F1	F2	α	T.I.	Δ_i
L1-(1/3)L2	F1	2	1	1	0	0	20	20/1
(1/3)L2	α	1	3	0	-1	1	18	18/3 ←
L3+L2	-F'	-1	-3	0	1	0	-18	

Os coeficientes negativos de X e Y indicam a não optimalidade da solução em análise sendo, neste caso, possível aumentar a função objetivo.

Como a variável Y é a que tem o menos valor na 3ª linha, escolhemos esta para entrar na base e α é a que sai, uma vez que é a que tem o menor valor de Δ_i. Obtemos então o quadro da 1ª Iteração:

base	X	Y	F1	F2	α	T.I.
F1	5/3	0	1	1/3	-1/3	14
Y	1/3	1	0	-1/3	1/3	6
-F'	0	0	0	0	1	0

Como a linha de -F' não tem valores negativos, a variável artificial não pertence à base, o valor da função objetivo é 0 e as bases estão nulas na função objetivo, esta solução é solução ótima do problema auxiliar.

Como encontrámos a solução ótima do problema auxiliar, acabámos a 1ª fase e passamos para a 2ª fase, onde a solução básica admissível de partida do problema original é a solução ótima do problema auxiliar, podendo ignorar a coluna da variável artificial, eliminando-a.

Com isto, obtemos, com a função objetivo do problema original F = 3X + Y:

base	X	Y	F1	F2	T.I.
F1	5/3	0	1	1/3	14
Y	1/3	1	0	-1/3	6
F	-3	-1	0	0	0

Como Y faz parte da solução básica admissível de partida, então o seu valor na Função Objetivo tem de ser nulo, o que não acontece.

Procedemos, então, à sua anulação.
Do mesmo modo, como a variável X é a de menor valor na 3ª linha, esta é a variável escolhida a entrar na base, retirando F1 por conter o valor mais baixo de Δ_i, tendo assim:

	base	X	Y	F1	F2	T.I.	Δ_i
(3/5)L1	F1	5/3	0	1	1/3	14	14/(5/3) ←
L2-(1/5)L1	Y	1/3	1	0	-1/3	6	6/(1/3)
L3+(9/5)L1	F	-3	-1	0	0	0	

Obtemos assim o quadro da 2ª iteração:

	base	X	Y	F1	F2	T.I.	Δ_i
L1	X	1	0	3/5	1/5	42/5	---
L2	Y	0	1	-1/5	-4/15	16/5	6/1 ←
L3+L2	F	0	-1	9/5	3/5	126/5	

Como temos a variável Y não nula e esta pertence à base, temos de anulá-la também. No estado do quadro, é fácil saber que operação fazer. Obtemos assim o quadro da 3ª iteração:

base	X	Y	F1	F2	T.I.
X	1	0	3/5	1/5	42/5
Y	0	1	-1/5	-4/15	16/5
F	0	0	8/5	1/3	142/5

Como a Função Objetivo não tem valores, dos coeficientes, negativos, e os valores dos coeficientes das variáveis F1 e F2 não são nulos, concluímos que estamos perante a solução ótima deste problema de PL, com:

$(X^*,Y^*) = \left(\frac{42}{5}, \frac{16}{5}\right)$
e
$F^* = F(X^*,Y^*) = 3 * \frac{42}{5} + \frac{16}{5} = \frac{142}{5}$

Podemos concluir os resultados com as alíneas anteriores.