ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 5 a 15 de janeiro de 2018

Data de Limite de Entrega

15 de janeiro de 2018, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Espaços Vetoriais. Aplicações Lineares. Valores e Vetores Próprios.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes, determinantes, valores e vetores próprios.

Trabalho a desenvolver

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

- O primeiro grupo contem questões de escolha múltipla, cuja resposta não necessita de justificação.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.
Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores.
A classificação dos restantes Grupos é a seguinte

II.	III.	IV.
0,6	1,6	0,8

.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em pdf devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato pdf para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato pdf a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Sejam E e F subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Então

- ☐ **a)** $E = F$.
- ☐ **b)** $E = \mathbb{R}^2$ ou $F = \mathbb{R}^2$.
- ☐ **c)** $\dim E = \dim F$.
- ☐ **d)** $(0,0) \in E \cap F$.

2. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $u = (-1,1,1)$, $v = (0,1,-1)$ e $w = (1,0,0)$.

Então

- ☐ **a)** (u,v) é uma sequência linearmente dependente.
- ☐ **b)** $\langle u,v\rangle = \langle u,w\rangle$.
- ☐ **c)** (u,v,w) é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ **d)** (u,v,w) é uma sequência linearmente dependente.

3. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com valores próprios $1, 2$ e 3.

Então

- ☐ **a)** $\det A = 0$.
- ☐ **b)** $A = A^{-1}$.
- ☐ **c)** A é diagonalizável.
- ☐ **d)** A não é diagonalizável.

4. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz que representa uma transformação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Então

- ☐ **a)** $\dim \text{Nuc } f = \dim \text{Im } f$.
- ☐ **b)** Nuc $f = (0,0)$.
- ☐ **c)** Im $f = (0,0)$.
- ☐ **d)** $\dim \text{Nuc } f = 2$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo (se considerar um contra-exemplo basta o caso $n = 2$), consoante o que for apropriado.

a) Sejam A e $B \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes.
Então A e B têm os mesmos vetores próprios.

b) Seja $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Então a soma de dois vetores próprios de A ainda é um vetor próprio.

III. Seja $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
$T(ax^2 + bx + c) = (a - b, c - b, b - a)$.

i) Determine a matriz B que representa T em relação à base canónica no espaço de partida e no espaço de chegada.

ii) Determine uma base para o espaço das colunas de B.

iii) Determine uma base para o espaço das linhas de B.

iv) Determine uma base para o espaço imagem de T.

v) Determine uma base para o núcleo de T.

vi) Calcule os valores próprios de B.

vii) Determine uma base para o espaço próprio associado a cada um dos valores próprios de B, e indique a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

viii) Diga, justificadamente, se a matriz B é semelhante a uma matriz diagonal, e em caso afirmativo

a) determine a matriz que diagonaliza B,

b) calcule explicitamente a matriz diagonal semelhante a B.

IV. Considere em $\mathbb{R}^3$ as sequências

$$\mathscr{B}_1 = ((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)) \text{ e } \mathscr{B}_2 = ((1,0,1),(-1,0,1),(0,1,0)).$$

a) Mostre que as sequências $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ são bases de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine a matriz de mudança de base $\mathscr{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.

c) Seja $u \in \mathbb{R}^3$ o vetor de coordenadas $(1,2,-1)$ na base $\mathscr{B}_1$. Usando a matriz da alínea anterior obtenha as coordenadas de u na base $\mathscr{B}_2$.

FIM