Elementos de Análise Infinitesimal I | 21030

Proposta de Resolução Sumária

1.1. Considere-se a substituição $u = x^2$. Trata-se de uma função injetiva no intervalo $]0, +\infty[$, cuja função inversa é $x = \sqrt{u}$. Donde, $dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du$, pelo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1+u^2}}\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du}_{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+1}) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$, onde na última igualdade se utilizaram os teoremas 7 e 8, respetivamente, pág. 532 e 533. Como $u = x^2$ obtém-se que

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1}), \quad x > 0$$

é uma primitiva de $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$, $x > 0$.

1.2. Note-se que, mais geralmente, a função $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$ está definida para valores $x \in \mathbb{R}$. Derivando então esta função tem-se

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pelo que a função $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$, $x \in \mathbb{R}$, responde ao pedido.

2. Como sugerido, considere-se a substituição $x = a\cos\theta$, que é uma função injetiva no intervalo $]0, \pi[$. Então $dx = -a\,\mathrm{sen}\,\theta$ pelo que

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = -a\int \sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = -a\int \sqrt{a^2\mathrm{sen}^2\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta.$$

Como $a > 0$ e $\operatorname{sen}\theta > 0$ para $\theta \in]0, \pi[$, tem-se que a última expressão é igual a

$$-a \int (a \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -a^2 \int \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta.$$

Para calcular esta última primitiva pode fazer-se como sugerido no exercício (7) pág. 526. Em alternativa a essa proposta, note-se que

$$\int \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \int (1-\cos^2\theta) \, d\theta = \theta - \int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$, cf. Exemplo 4 pág. 518. Dos cálculos anteriores resulta assim que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{a^2}{2}\left(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

com $\theta = \arccos\frac{x}{a}$, $\cos\theta = \frac{x}{a}$ (por $x = a\cos\theta$) e

$$\begin{aligned} x = a\cos\theta &\implies x^2 = a^2\cos^2\theta = a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) \\ &\implies a^2 - x^2 = a^2\operatorname{sen}^2\theta \implies a\operatorname{sen}\theta = \sqrt{a^2 - x^2}, \end{aligned}$$

onde na última implicação utilizou-se novamente o facto de $a > 0$ e de $\operatorname{sen}\theta > 0$ para $\theta \in]0, \pi[$. Estes factos conjugados permitem concluir que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\frac{x}{a}\right) + C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Observe-se que por $x = a\cos\theta$ com $\theta \in]0, \pi[$, tem-se $\frac{x}{a} \in]-1, 1[$, pelo que, como indicado na pág. 156,

$$\arccos\frac{x}{a} + \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Por este motivo, o resultado também pode ser apresentado na forma

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

usual na literatura.