U.C. 21082
Matemática Finita

9 de julho de 2013

Critérios de avaliação

Questões de Escolha Múltipla:

- Na prova de **Exame**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

- No **P-fólio**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

Restantes Questões:

- Para a correcção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.

- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.

- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.

- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

Exame: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
b)	**d)**	**c)**	**b)**

P-fólio: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
b)	**d)**	**c)**

5. (**Exame e P-fólio**: 3.0 valores[1]))

5.1. (**Exame e P-fólio**: 0.50 valor)
Este problema é idêntico ao da pág. 67 do livro. Pelo mesmo raciocínio conclui-se que existem

$$\binom{10+4-1}{10} = 286$$

diferentes soluções em $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ da equação dada.

5.2. (**Exame e P-fólio**: 1.50 valores)
O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Tal como na alínea anterior, existem $\binom{3+2-1}{3} = 4$ soluções em $\mathbb{N}$ para a primeira equação e $\binom{7+2-1}{7} = 8$ soluções em $\mathbb{N}$ para a segunda equação. Logo, existem $4 \times 8 = 32$ diferentes soluções em $\mathbb{N}$ do sistema dado.

5.3. (**Exame e P-fólio**: 1.0 valor)
O número 2 pode aparecer de quatro maneiras: ou $x_1 = 2$, ou $x_2 = 2$, ou $x_3 = 2$, ou $x_4 = 2$. Por exemplo, para o primeiro caso, o sistema dado reduz-se a

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 = 2 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

que possui $\binom{3+2-1}{3} = 4$ diferentes soluções em $\mathbb{N}$. O mesmo raciocínio aplicado aos restantes três casos permite então concluir que há 24 soluções do sistema em que o número 2 aparece.

[1] Grupo 4 do P-fólio.

6. (**Exame**: 7.50 valores; **P-fólio**: 4.0 valores[2])

6.1. (**Exame**: 1.70 valores; **P-fólio**: 2.0 valores)
Designando por

$$a_i = (-1)^{i-1} n \binom{n-2}{i-2}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \tag{1}$$

tem-se, pela lei de Pascal e pela fórmula da extracção,

$$\begin{aligned} \Delta a_i = a_{i+1} - a_i &= (-1)^i n \left\{ \binom{n-2}{i-1} + \binom{n-2}{i-2} \right\} \\ &= (-1)^i n \binom{n-1}{i-1} \\ &= (-1)^i i \binom{n}{i}. \end{aligned}$$

Em relação à desigualdade $2 \leq i \leq n-1$ que surge em (1), note-se que ela implica que $n \geq 3$. Este facto é relevante para a resolução da alínea seguinte.

6.2. (**Exame**: 3.80 valores; **P-fólio**: 2.0 valores)

6.2.1. Atendendo à alínea anterior, resulta da aplicação do método telescópico que, para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} &= -\binom{n}{1} + (-1)^n n \binom{n}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \underbrace{(-1)^k k \binom{n}{k}}_{=\Delta a_k} \\ &= ((-1)^n - 1)n + \underbrace{(-1)^{n-1} n \binom{n-2}{n-2}}_{=a_n} - \underbrace{(-1)^1 n \binom{n-2}{0}}_{=a_2} = 0. \end{aligned}$$

Fica como exercício a verificação do caso particular $n = 2$.

6.2.2. Pela fórmula da extracção obtém-se

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1},$$

onde o último somatório, por intermédio da mudança de variável $i = k-1$, é igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n-1}{i} = -\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i}.$$

Pela fórmula binomial resulta então

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} = (1-1)^{n-1},$$

o qual é igual a 0, porque $n > 1$.

[2] Grupo 5 do P-fólio.

6.3. (**Exame**: 2.0 valores)

Designando por $n = \#X$, $\#(X \times X) = n^2$ e, portanto,

$$\sum_{S \subseteq X \times X} (-1)^{\#S} \#S = \sum_{k=0}^{n^2} \sum_{\substack{S \subseteq X \times X \\ \#S = k}} (-1)^{\#S} \#S = \sum_{k=0}^{n^2} (-1)^k k \binom{n^2}{k}.$$

Atendendo a que $\#X = n > 1$ e, assim, $\#(X \times X) = n^2 > 1$, o resultado pretendido deriva agora da aplicação da igualdade do enunciado da alínea 6.2.

7. (**Exame**: 2.0 valores)

Caso Base: $n = 1$. Neste caso tem-se

$$(2-1)^2 = 1 = \frac{1}{3}(4-1),$$

o que prova que o caso base verifica-se.

Hipótese de indução: Dado $n \geq 1$, **qualquer**, suponhamos que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(4n^3 - n).$$

Para $n+1$ tem-se então

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = (2(n+1)-1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2,$$

que, pela hipótese de indução, é igual a

$$(2(n+1)-1)^2 + \frac{1}{3}(4n^3 - n) = \frac{1}{3}(4(n+1)^3 - (n+1))$$

(os detalhes da última igualdade são deixados como exercício).

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer número natural $n \geq 1$, é válida a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(4n^3 - n).$$

8. (**Exame**: 3.50 valores)

8.1. (**Exame**: 1.50 valores)

A relação de recorrência do enunciado é equivalente a

$$a_n = -4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

e, portanto, o seu polinómio característico é igual a

$$p(t) = t^2 + 4t + 3.$$

Sendo as raízes de p iguais a -3 e a -1, tem-se então que cada termo a_n da solução geral é igual a

$$a_n = \alpha(-1)^n + \beta(-3)^n$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 0, \quad -\alpha - 3\beta = a_1 = 2,$$

ou seja, para $\alpha = -\beta = 1$.

8.2. (**Exame e P-fólio**: 2.0 valores[3])

Seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a função geradora da sucessão $\langle a_n \rangle$. Tem-se então

$$\begin{aligned}
A(t) &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n \\
&= a_0 + a_1 t - \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} + 3a_{n-2}) t^n \\
&= a_0 + a_1 t - 4t \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} - 3t^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n-2} \\
&= a_0 + a_1 t - 4t \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n - 3t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\
&= 2t - 4tA(t) - 3t^2 A(t),
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{2t}{3t^2 + 4t + 1} = \frac{2t}{(1+t)(1+3t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+3t} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-3t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - 3^n) t^n.
\end{aligned}$$

(os detalhes das duas últimas sequências de igualdades são deixados como exercício).

Assim, por comparação dos coeficientes das somas

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ e } A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - 3^n) t^n,$$

conclui-se que $a_n = (-1)^n (1 - 3^n)$, $n \geq 0$.

[3]Grupo 6 do P-fólio.