Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

1. Começamos por notar que σ não é injetiva pois assumindo que

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = s_1 s_2 s_3 \dots$$

podemos escolher $s_0 = 0$ ou $s_0 = 1$ e isso não irá influenciar a imagem de $s_0 s_1 s_2 \dots$ por σ uma vez que o primeiro dígito da sequência infinita vai desaparecer quando aplicarmos σ. Em resumo temos dois objetos com a mesma imagem contrariando a injetividade. Não sendo injetiva não poderá ser invertível. Assim ficam excluídas **A)** e **C)**. Vejamos que **B)** é verdadeira. De facto, todo o elemento $s_0 s_1 s_2 \cdots \in \Sigma_2$ (no conjunto de chegada) está relacionado com pelo menos um elemento $a_0 a_1 a_2 \cdots \in \Sigma_2$ (no conjunto de partida) no sentido em que $\sigma(a_0 a_1 a_2 \dots) = s_0 s_1 s_2 \dots$. Basta observar que escolhendo $a_i = s_{i-1}$ para $i = 1, 2, \dots$ e optando por tomar $a_0 = 0$ ou 1 obtemos o tal elemento no conjunto de partida cuja imagem é precisamente $s_0 s_1 s_2 \cdots \in \Sigma_2$.

2. A cardinalidade de Per$_n(\sigma)$ é obtida da seguinte forma. Vamos considerar sequências binárias finitas de comprimento n definidas por $a_1 a_2 \dots a_n$. Agora observamos que sequências infinitas x em Per$_n(\sigma)$ são concatenações de $a = a_1 a_2 \dots a_n$ ou seja

$$x = \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{a} \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{a} \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{a} \dots$$

Claramente quando a x aplicarmos n vezes σ vamos obter novamente x ou seja $x \in$ Per$_n(\sigma)$. Finalmente, recordamos que sequências binárias finitas de comprimento n possuem cardinalidade 2^n, logo $\#$Per$_n(\sigma) = 2^n$ e **A)** é falsa.

Vamos considerar $x = 110110110...$ ou seja o ponto periódico de período 3 obtido pela sequência binária finita 110 repetida *ad infinitum*. Vejamos que $x \notin$ Per$_5(\sigma)$. De facto

$$\sigma(110110110110110 \dots) = 0110110110110110 \cdots \neq x.$$

Logo **B)** também é falsa.

A afirmação **C)** diz-nos que todos os pontos em Σ_2 são periódicos ou seja $\forall x \in \Sigma_2\ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \text{Per}_n(\sigma)$. Para provarmos que **C)** é falsa basta exibir um ponto de Σ_2 não periódico como por exemplo:

$$x = 10100100010000\ldots$$

notando que a construção de x é baseada no seguinte princípio:

$$x = \underbrace{10}_{10^1}\underbrace{100}_{10^2}\underbrace{1000}_{10^3}\underbrace{10000}_{10^4}\ldots\underbrace{1\overbrace{00\ldots00}^{k\text{ zeros}}}_{10^k}\ldots$$

É fácil nos convencermos que x não é periódico pois a sequência inicial 101 nunca mais será repetida pois nunca mais existirá apenas um 0 entre dois 1's por mais composições por σ façamos. Resta a afirmação **D)** para escolhermos como verdadeira.

3. Começamos por calcular $\#A$. Usando os dígitos em $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sabemos que a cardinalidade do conjunto de todas as sequências 5-árias (que admitem os dígitos em X) de tamanho 4 é 5^4. Esse conjunto é precisamente $\text{Per}_4(\sigma)$ onde $\sigma\colon \Sigma_5 \to \Sigma_5$. Contudo, em A estamos proibidos de usar dígitos pares, logo os 4 espaços só podem albergar dígitos em $\{1, 3\}$ reduzindo a cardinalidade para 2^4. Em resumo $\#A = 2^4$. Aplicando o mesmo raciocínio concluímos que $\#B = 3^4$. Como **A)** se resume à desigualdade $80 > 81$ esta alínea será falsa. A alínea **C)** é falsa pois o elemento $x = s_0 s_1 s_2 \cdots \in \Sigma_5$ definido por $a_0 = 0$ e $a_i = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$ nem pertence a A nem a B não podendo assim pertencer a $A \cup B$. Finalmente vamos calcular $\#C$. Vimos que $\#B = 3^4$ onde foram consideradas quatro posições ($1^{\underline{a}}$ à $4^{\underline{a}}$) onde poderiam ser albergados três dígitos distintos:

$$\overbrace{\underline{1^{\underline{a}}}}^{\text{três dígitos possíveis}} \quad \underbrace{\underline{2^{\underline{a}}}}_{\text{três dígitos possíveis}} \quad \overbrace{\underline{3^{\underline{a}}}}^{\text{três dígitos possíveis}} \quad \underbrace{\underline{4^{\underline{a}}}}_{\text{três dígitos possíveis}}$$

Para o conjunto C temos que evitar dígitos iguais consecutivos logo, em princípio, teremos

$$\overbrace{\underline{1^{\underline{a}}}}^{\text{três dígitos possíveis}} \quad \underbrace{\underline{2^{\underline{a}}}}_{\text{dois dígitos possíveis}} \quad \overbrace{\underline{3^{\underline{a}}}}^{\text{dois dígitos possíveis}} \quad \underbrace{\underline{4^{\underline{a}}}}_{\text{dois dígitos possíveis}}$$

o que resultaria em $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ situações possíveis. Mas temos que ter em atenção que existem nestes 24 casos, situações que não cumprem o exigido para pertencer ao conjunto C. Isso sucede quando o dígito na $4^{\underline{a}}$ posição é igual ao dígito da $1^{\underline{a}}$ posição. Se tivermos

$$\underline{X}__\underline{X},$$

onde X pode ser 0, 2 ou 4 então na $2^{\underline{a}}$ posição só podemos ter dois dígitos e na $3^{\underline{a}}$ posição somente um dígito pois os dígitos na $2^{\underline{a}}$ posição e $4^{\underline{a}}$ posição são diferentes sobrando apenas uma escolha para a $3^{\underline{a}}$ posição. Isto desdobra em precisamente seis casos. Assim, teremos $24 - 6 = 18$ casos. Logo $\#C = 18 \neq 16 = \#A$ e **B)** é falsa. Logo **D)** é verdadeira.

4. O número 38 é escrito por $0110010\ldots$ ou seja $s_1 = s_2 = s_5 = 1$ e $s_i = 0$ caso contrário. De facto,

$$\begin{aligned} 38 &= 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 \\ &= 2 + 4 + 32 = \Phi(0110010\ldots), \end{aligned}$$

logo possui três dígitos 1 e não quatro sendo **A)** falsa. O número real $\frac{1}{2}$ não tem correspondente em Σ_2 pois seria necessário considerar potências negativas (note que $\frac{1}{2} = 1 \times 2^{-1}$) logo a opção **C)** é falsa. Como sabemos que $\Sigma_2 = \text{Seq}_\infty$ podemos usar o Teorema de Cantor e concluir que Σ_2 não é enumerável. Logo a opção correta é a **B)**.

5. Começamos por recordar que o número de permutações de elementos de $[n]$ é dado por $n!$ e que $\#\mathcal{P}([n]) = 2^n$. Para nós o 'caso base' é quando $n = 4$. Neste caso temos $4! = 24 > 2^4 = 16$. Vejamos agora o 'passo da indução' que indica que $n! > 2^n$ e vejamos o que acontece para o caso $n + 1$. Assim

$$(n+1)! = (n+1)n! \overset{\text{passo da indução}}{>} (n+1)2^n \overset{\text{se } n \geq 1}{>} 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

6. **a)** Escrevemos $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ e $J = \{y_1, y_2, \ldots, y_j\}$. Começamos por observar que temos j possibilidades para definir a imagem de x_1 por f pois $f(x_1) \in J$ e J tem cardinalidade igual a j. De forma inteiramente análoga temos j possibilidades para definir a imagem de x_2 por f, j

possibilidades para definir a imagem de x_3 por f, etc ... até chegarmos às j possibilidades de definir a imagem de x_i por f. Teremos assim

$$\overbrace{\underline{1^a}}^{j \text{ possibilidades}} \quad \underbrace{\underline{2^a}}_{j \text{ possibilidades}} \quad \overbrace{\underline{3^a}}^{j \text{ possibilidades}} \quad \cdots \quad \underbrace{\underline{i^a}}_{j \text{ possibilidades}} \quad = j^i,$$

funções distintas $f\colon I \to J$.

b) No caso de f ter que ser injetiva começamos por observar que tal só será possível se $j \geq i$ pois caso contrário teremos um conjunto vazio de funções nas condições requeridas. No pressuposto $j \geq i$ temos na mesma j possibilidades para definir a imagem de x_1 por f contudo para manter a injetividade só teremos $j-1$ possibilidades para definir a imagem de x_2 por f, $j-2$ possibilidades para definir a imagem de x_3 por f, etc ... até chegarmos às $j-(i-1) = j-i+1 \geq 1$ possibilidades de definir a imagem de x_i por f. Teremos assim

$$\overbrace{\underline{1^a}}^{j \text{ possibilidades}} \quad \underbrace{\underline{2^a}}_{j-1 \text{ possibilidades}} \quad \overbrace{\underline{3^a}}^{j-2 \text{ possibilidades}} \quad \cdots \quad \underbrace{\underline{i^a}}_{j-i+1 \text{ possibilidades}} \quad ,$$

ou seja $j(j-1)(j-2) \times \cdots \times (j-i+1) = \frac{j!}{(j-i)!}$ funções injetivas distintas $f\colon I \to J$.

7. Trata-se de distribuir dez amêndoas em tudo o resto iguais por quatro cores distintas, pelo que estamos no caso quatro da tabela dos doze caminhos. A resposta é portanto:

$$\binom{10+4-1}{4-1} \text{ ou } \binom{10+4-1}{10}.$$

8. Seja E o conjunto das distribuições de lugares em que não existem restrições algumas (ou seja $\#E = 6!$), e A_i ($i = 1, 2, 3$) o conjunto das distribuições de lugares em que o casal i fica junto. Para calcularmos $\#(E \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3))$ usaremos o princípio de inclusão/exclusão para calcular:

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 \\ &- (\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3)) \\ &+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Para calcularmos $\#A_1$ podemos pensar como se estivéssemos a distribuir cinco entidades (o casal 1 mais as quatro pessoas restantes)

por cinco lugares, podendo ainda os elementos do casal 1 trocar entre si: $5! \times 2$. Analogamente obtemos $\#(A_1 \cap A_2) = 4! \times 2 \times 2$ e $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3! \times 2 \times 2 \times 2$. Finalmente,

$$\#(E \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = 6! - 3 \times 5! \times 2 + 3 \times 4! \times 2^2 - 3! \times 2^3 = 240$$

FIM