Universidade Aberta
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

Exame

U.C. 21021

Computação Numérica

05 de fevereiro de 2013

INSTRUÇÕES

Para a resolução do teste, leia as seguintes informações e instruções, antes de responder

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução do teste.
- O enunciado do teste incide sobre os cap. 1 a 4 do livro recomendado e sobre a linguagem de programação octave, tem **4** páginas e termina com a palavra **FIM**.
- O único elemento de consulta permitido é o formulário que se encontra anexo a este enunciado.
- Para a execução do exame É INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- O cabeçalho deve ser preenchido de modo legível antes do início da resolução.
- As respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- O teste é constituído por 5 grupos. A cotação total do teste é de 20 valores.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível por outra pessoa.
- As suas respostas devem ser claras, **indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão**. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respectivas questões.
- O tempo de realização do teste é de 120 minutos, mais 30 minutos de tolerância.

I [2 valores]

1.1. [1] Considere $x = 0.63794...$ e a aproximação $\bar{x} = 0.638$. Determine limites superiores ε_{LS}, r_{LS} respectivamente para os erros absoluto $\varepsilon \le \varepsilon_{LS}$ e relativo $r \le r_{LS}$. Os limites devem ser os menores possíveis para a precisão dada para x e $\bar{x}$.

1.2. [1] Calcule uma estimativa do erro no cálculo de $(4/7)\text{sen}(\pi/3)$, resultante da propagação do erro inicial, ao tomar-se $4/7 \approx 0.5714$ e $\pi/3 \approx 1.047$.

II [3 valores]

Considere a seguinte equação,

$$e^{-x} - \text{sen}\, x = 0$$

2.1. [1] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo [0, 1].

2.2. [1.5] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando seis iterações do método da bissecção, a partir do valor inicial $a_0 = 0, b_0 = 1$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, a_k, b_k, x_k, f(x_k)$, sinais de $f()$, para k=0,1,2,3,4,5.

2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

III [3 valores]

Considere a matriz A e o vector b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 21 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 22 \\ 29 \end{bmatrix}$$

3.1. [1.5] Determine a factorização de Choleski de A.

3.2. [1.5] Resolva o sistema linear Ax = b, com $x = [\, x_1, x_2, x_3]^T$, utilizando a factorização encontrada na alínea 1.

IV [4 valores]

Considere a seguinte tabela de valores correspondente à função $f(x) = e^{-x} - \text{sen}\, x$

x	$f(x)$
0.1	0.805004
0.2	0.620061
0.3	0.445298

4.1. [2] Obtenha o polinómio interpolador de *f(x)* nos três pontos tabelados, através da fórmula de Newton com diferenças divididas.

4.2. [1.5] Obtenha uma estimativa do erro de interpolação para x =0.15.

4.3. [0.5] Obtenha o valor interpolado para x =0.15 e calcule o erro. Compare com o valor estimado na alínea anterior.

V [8 valores]

5.1. [1.5] Apresente um pequeno programa em Octave que crie a matriz A a partir da concatenação de vectores coluna. Os vectores coluna não devem ser criados elemento a elemento. Utilize os operadores e funções que achar necessários para a criação dos vectores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1.4 \\ 2 & 8 & 3 & -1.2 & 0 & 4 & -1.2 \\ 3 & 10 & 3 & -1.4 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

5.2. [1.5] Considere as funções f(x)=sen x e g(x)=log (1+x). Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções f(x) e g(x), com f(x) para x de -1 a 1 com intervalos de 0.01, g(x) para x de 0 a 1 com intervalos de 0.02 e com as seguintes características:
- f(x) a traço contínuo de cor verde, com legenda;
- g(x) a ponteado de cor azul, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (0.5, 0.405) deve ser assinalado com um marcador tipo bola, de cor preta;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta “x”;
- o título do gráfico deve ter a etiqueta “sen(x) e log(1+x)”.

5.3. [5] Escreva a função em Octave,

```
function L=choleski(A)
%
% Metodo de Choleski
% Calcula L tal que A=L*L^T
```

que dado uma matriz A simétrica definida positiva, calcula a matriz L triangular inferior com elementos positivos na diagonal tal que $A = LL^T$.

FORMULÁRIO

Interpolação Polinomial

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f\left[x_0, \ldots, x_i\right](x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0 + sh) = f_0 + s\,\Delta_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

Equações Não Lineares

Método da bissecção

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método da secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método do ponto fixo

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Sistemas de Equações Lineares

Factorização $A = LU$

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i1} = a_{i1} / u_{11} \quad i \geq 2$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}) / u_{ii} \quad j > i \geq 2$$

Factorização (Choleski) $A = LL^T$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = a_{i1} / l_{11} \quad i \geq 2$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{ii} \quad j > i \geq 2$$

FIM