

U.C. 21082

Matemática Finita

19 de junho de 2019

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 9 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com exceção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorreta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

| Grupo 5 | Grupo 6 | Grupo 7 | Grupo 8 | Grupo 9 |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 4.0 | 2.0 | 3.5 | 1.5 | 5.0 |

Nome:

Nº de Estudante: CC/BI nº

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respetivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Entre 100 utilizadores das redes sociais, 43 estão inscritos no *Instagram*, 52 estão inscritos no *Twitter* e 30 não estão inscritos, nem no *Instagram*, nem no *Twitter*. O número de utilizadores de ambas as redes sociais, *Instagram* e *Twitter*, é igual a:

- | | |
|--------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> a) 95 | <input type="checkbox"/> c) 70 |
| <input type="checkbox"/> b) 25 | <input type="checkbox"/> d) A nenhum dos valores anteriores |

2. Dados dois conjunto X, Y finitos e não vazios e $a \in Y$, seja $f : X \times \{a\} \rightarrow Y$ uma aplicação injectiva. Tem-se que:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a) $\#X < \#(X \times \{a\}) \leq \#Y$ | <input type="checkbox"/> c) $\#X > \#(X \times \{a\}) \geq \#Y$ |
| <input type="checkbox"/> b) $\#X = \#(X \times \{a\}) \leq \#Y$ | <input type="checkbox"/> d) $\#X = \#(X \times \{a\}) \geq \#Y$ |

3. Das opções seguintes indique a verdadeira:

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) $\text{mmc}(2, -6) = -6$ | <input type="checkbox"/> c) $\text{mmc}(2, -6) = 2$ |
| <input type="checkbox"/> b) $\text{mmc}(2, -6) = -2$ | <input type="checkbox"/> d) $\text{mmc}(2, -6) = 6$ |

4. Relativamente aos números 57402 e 20475 podemos afirmar:

- a) Ambos são divisíveis por 7
- b) 57402 é divisível por 7, mas 20475 não é
- c) 20475 é divisível por 7, mas 57402 não é
- d) Nenhum deles é divisível por 7

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.

5. Pretende-se formar uma comissão de 8 elementos a partir de um grupo de 17 informáticos e de 15 matemáticos. De quantas maneiras podemos formar essa comissão de modo que...

5.1. ... qualquer elemento pode integrar essa comissão;

5.2. ... a comissão integre 4 informáticos e 4 matemáticos;

5.3. ... a comissão integre pelo menos um informático.

6. Mostre que para qualquer número natural $n > 1$ tem-se

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0.$$

7.

7.1. Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, suponha que existem dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + by = 1.$$

Prove que se $a \mid (bc)$ para um certo $c \in \mathbb{Z}$, então $a \mid c$.

7.2. Se p for um número primo tal que $p \mid (ab)$, mostre que ou $p \mid a$, ou $p \mid b$.

8. Verifique que $\text{mdc}(1001, 109) = \text{mdc}(20, 9)$.

9. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 12a_{n-1} - 35a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$.

9.1. Determine o termo geral da sucessão.

9.2. Por recurso ao **método de indução matemática** mostre que 3 é um divisor de $a_{2n+1} + 2 \cdot 5^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

9.3. Verifique que, para cada $n \in \{1, 2, \dots\}$, $\frac{a_n}{5}$ é uma fracção irredutível.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM