Orientação de trabalho:

• Continue o estudo do Tema 3: **Recorrências e Funções Geradoras**

Secção 3.2: *Recorrências lineares de coeficientes constantes.*)

Nesta secção iremos somente estudar os conteúdos da subsecção:

Secção 3.2.1: *Caso homogéneo (raízes simples)* - (pág 165 a 177.)

No caso geral, as relações de recorrência têm que ser estudadas caso a caso, pois não há um método geral. Há, no entanto, uma classe particular de recorrências que podem ser estudadas de modo sistemático. É a classe das *relações de recorrência lineares, homogéneas e com coeficientes constantes*, e é sobre esta classe que o nosso estudo incidirá.

Relação de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes:

Uma *relação de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes* é dada por uma fórmula de recorrência do tipo

$$\boxed{x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}}, \tag{1}$$

em que k é um número fixo (independente de n) e $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ (também independentes de n), e por k *condições iniciais*

$$x_0 = b_0, \quad x_1 = b_1, \quad \ldots, \quad x_{k-1} = b_{k-1}, \tag{2}$$

onde $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1} \in \mathbb{R}$ são números previamente dados.

Uma *solução* da relação de recorrência acima é uma sucessão (infinita) de números reais $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ tal que

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad a_{k-1} = b_{k-1}$$

e tal que, para todo $n \geq k$,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Observações.

1. Notemos que a expressão

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

   - é *linear*, porque não envolve produtos de variáveis,
   - é *homogénea*, porque não envolve parcelas sem variáveis ou seja o termo independente é zero,
   - tem *coeficientes constantes*, porque $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ são números (não são variáveis).

2. Dada uma fórmula de recorrência, do tipo (1), existem infinitas soluções que a satisfazem:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \iff x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} = 0$$

- uma equação linear com $k+1 \geq 2$ incógnitas. Além disso, se $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ são duas soluções de (1) a sucessão $\langle ra_n + sb_n \rangle$, com $r, s \in \mathbb{R}$ quaisquer, também é uma solução da mesma fórmula de recorrência (1) - Princípio da Sobreposição.

3. Mas as condições iniciais (2), garantem que a solução é única. De facto, neste caso, vamos ter sucessivamente, um sistema homogéneo com $k+1$ equações lineares e $k+1$ incógnitas, cuja matriz simples tem rank $k+1$. Logo é possível e determinado. O 1º sistema é:

$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_1 = b_1 \\ x_{k-1} = b_{k-1} \\ x_k - c_1 x_{k-1} - c_2 x_{k-2} - \cdots - c_k x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{cuja matriz simples é} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -c_k & -c_{k-1} & \cdots & -c_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinamos, portanto, b_k tal que $b_k - c_1 b_{k-1} - c_2 b_{k-2} - \cdots - b_k x_0 = 0$. De seguida, consideramos um novo sistema, cujas equações são:

$$x_1 = b_1 \ , \ x_2 = b_2 \ , \ x_k = b_k \ , \ x_{k+1} - c_1 x_k - c_2 x_{k-1} - \cdots - c_k x_1 = 0.$$

Novamente é um sistema possível e determinado e obtemos b_{k+1}. E assim sucessivamente.

Os cálculos indicados na observação 3, são pouco práticos e morosos. O objectivo é encontrar uma fórmula que nos permita calcular, para qualquer n, o valor a_n da solução $\langle a_n \rangle$. Os resultados seguintes são fundamentais para estes objectivos.

Polinómio característico de uma relação de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes:

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{k-1} x_{n-k+1} + c_k x_{n-k} \tag{1}$$

uma fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes.

1. Seja λ uma raiz (real ou complexa) do polinómio

$$\boxed{p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1} t - c_k} \tag{3}$$

na indeterminada t. Então, a sucessão $\langle \lambda^n \rangle$ é uma solução da fórmula de recorrência 1 - ver Proposição da pág 168.

- O polinómio (3) diz-se o *polinómio característico* da fórmula de recorrência (1).
- As raízes deste polinómio chamam-se as *raízes características* da fórmula de recorrência (1).

2. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todas as raízes características da fórmula de recorrência (1) e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ números reais ou complexos. Então, a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$\boxed{a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_r \lambda_r^n} \tag{4}$$

é uma solução da fórmula de recorrência (1) - ver Proposição da pág 169.

Ver o exemplo 1 de aplicação.

No caso em que as raízes do polinómio característico da fórmula de recorrência (1) são todas simples, então todas as soluções de (1) são obtidas como indicado em (4).

Polinómio característico: caso das raízes simples

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{k-1} x_{n-k+1} + c_k x_{n-k} \tag{1}$$

uma fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes e seja

$$p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1} t - c_k$$

o seu polinómio característico. Suponhamos que $p(t)$ tem exactamente k **raízes** (reais ou complexas) **distintas** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Então, qualquer solução $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência (1) tem a forma:

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são números reais ou complexos.

Estudar, com atenção, o Teorema (caso das raízes simples). Ver os exemplos 2, 4, 5 e 6 de aplicação do método do polinómio característico. Nestes exemplos, também poderá ver a utilidade das relações de recorrência na resolução de problemas combinatoriais. Em particular, trabalhará de novo com a sequência de Fibonacci.

O polinómio característico de (1) pode ter raízes complexas, de modo que vamos relembrar alguns conceitos importantes.

Polinómio característico: raízes complexas

Um número complexo $z \in \mathbb{C}$ tem a forma $a + \mathbf{i}b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ designa-se por *unidade imaginária*. A forma $z = a + \mathbf{i}b$ diz-se a *forma algébrica* de z. O complexo $\overline{z} = a - \mathbf{i}b$ diz-se o *conjugado* de $z = a + \mathbf{i}b$.

Diz-se que um número complexo z está na *forma trigonométrica* ou *forma polar* se

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\operatorname{sen}\theta) = \rho \operatorname{cis}\theta},$$

onde

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \ - \ \text{é o } \textit{módulo} \text{ de } z,$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\tfrac{b}{a} = \arg z \ - \ \text{é o } \textit{argumento principal} \text{ de } z.$$

- Se $z = \rho \operatorname{cis}\theta$, então $\overline{z} = \rho \operatorname{cis}(-\theta)$.
- Se $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis}\theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis}\theta_2$, então $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
- Se $z = \rho \operatorname{cis}\theta$, então

$$\boxed{z^n = \rho^n(\operatorname{cis} n\theta) = \rho^n(\cos n\theta + \mathbf{i}\operatorname{sen} n\theta)} \ - \ \text{Fórmula de Moîvre.}$$

Ver no exemplo 3, como é tratado este caso.

• Resolva os exercícios propostos na Folha 9.

Competências a adquirir: saber

- identificar uma relação de relação de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes;
- determinar o polinómio característico de uma fórmula de recorrência (1);
- determinar as raízes do polinómio característico;
- determinar uma solução de uma fórmula de recorrência (1);
- determinar a única solução de uma recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes, com condições iniciais.

Relações de recorrência (secção 3.2)

1. Determine as soluções das seguintes relações de recorrência:

(a) $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, com $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$.

(c) $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$, com $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

(e) $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

2. Considere as sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ definidas pelo sistema de recorrências

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - 4b_{n-1} \\ b_n = 4a_{n-1} + 6b_{n-1} \end{cases} \qquad \text{com } a_0 = 1 \text{ e } b_0 = 0.$$

(a) Mostre que $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ satisfazem a mesma fórmula de recorrência, mas com condições iniciais distintas.

(b) Verifique que $b_n = n2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, e determine o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$.

3. Um organismo primitivo leva uma hora a atingir a maturidade. Ao fim da segunda hora este organismo tem duas crias, sucedendo o mesmo em cada hora subsequente. Cada cria comporta-se da mesma maneira que o seu progenitor e não há mortes. Comece com um destes organismos recém-nascidos na hora zero e seja a_n o número de organismos ao fim de n horas.

(a) Mostre que $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

(b) Explicite a_n.

4. O Professor Cabeçudo costuma subir escadas de modo errático. Umas vezes sobe só um degrau, outras vezes sobe dois degraus de uma só vez. Encontre uma fórmula para o número b_n de maneiras diferentes do Professor subir escadas com n degraus.

5. Seja a_n o número de sequências distintas de comprimento n formadas com os algarismos 0, 1, 2 e 3, nas quais 0 ocorre um número ímpar de vezes. Determine uma relação de recorrência que seja satisfeita pela sucessão $\langle a_n \rangle$ e explicite o seu termo geral.

[*Sugestão:* Considere a sucessão $\langle b_n \rangle$, em que b_n é o número de sequências de comprimento n formadas com os algarismos 0, 1, 2 e 3 nas quais 0 ocorre um número par de vezes.]

6. Designe por a_n o número de maneiras distintas de pavimentar uma superfície rectangular de dimensões 2 por n com azulejos de dimensões 2 por 2 (todos iguais) e 1 por 2 (também todos iguais). Determine uma relação de recorrência para a sucessão $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$ e use-a para explicitar o termo geral a_n.

7. Considere o seguinte determinante de ordem $n \geq 1$:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

(a) Mostre que para $n \geq 3$, $A_n = (1+a^2)A_{n-1} - a^2 A_{n-2}$.

(b) A partir da igualdade da alínea anterior, conclua que, para $a^2 \neq 1$,

$$A_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}.$$

Folha 9: Soluções

---

1. **(a)** $a_n = 1 + 2^n,\ n \geq 0.$ **(c)** $a_n = -\frac{1}{2} + 2^n - \frac{1}{6}3^n,\ n \geq 0.$

(e) $a_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right),\ n \geq 0.$

2. **(a)** $x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}$ com $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ para $\langle a_n \rangle$ e $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ para $\langle b_n \rangle$.

(b) $a_n = (1-2n)2^n$.

3. **(b)** $\frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+1}),\ n \geq 0.$

4. **(b)** $b_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1}\right),\ n \geq 1$, onde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\widehat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5. $a_n = -2^{n-1} + 2^{2n-1} = 2^{n-1}\left(2^n - 1\right),\ n \geq 1.$

6. $a_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3},\ n \geq 1.$