Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
A)	D)	D)

4. Na resposta apresentada pela aluna existe sobrecontagem. Com efeito, seguindo o raciocínio da estudante, suponhamos que fixamos o algarismo 8 na casa dos milhares. Como qualquer uma das restantes posições pode ser ocupada por qualquer dígito entre 1 e 9, podemos, por exemplo, escolher o 5 como algarismo das centenas, o 8 como algarismo das dezenas e o 2 como algarismo das unidades. Desta forma obtém-se o número 8582.

Mas inicialmente podemos fixar o 8 na casa das dezenas. Se o fizermos, as restantes posições podem então ser ocupadas, por exemplo, com o algarismo 2 na casa das unidades, o 5 nas centenas e o 8 na casa dos milhares, obtendo-se novamente o número 8582. Ou seja, pelo raciocínio explicado pela aluna, o número 8582 aparece contabilizado duas vezes.

Por forma a eliminar a sobrecontagem, uma maneira de resolver a questão colocada será calcular, primeiro, o número total de números de quatro dígitos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (cujo valor é $9^4 = 6561$) e, depois, subtrair o número total de números de quatro dígitos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{8\}$ (cujo valor é igual a $8^4 = 4096$). Obtém-se assim um total de

$$6561 - 4096 = 2465$$

números diferentes de quatro dígitos escolhidos entre 1 e 9 e que contêm o algarismo 8.

5. Nas condições do enunciado, provemos que $h : Y \to Z$ é uma aplicação sobrejectiva. Com efeito, dado um $z \in Z$, **qualquer**, resulta da hipótese de $(h \circ f)(X) = Z$ que

$$\exists\, x \in X : \underbrace{(h \circ f)(x)}_{=h(f(x))} = z.$$

Assim, designando por $y = f(x) \in Y$ tem-se que $h(y) = z$. Deste mesmo fica provado que $h : Y \to Z$ é uma aplicação sobrejectiva.

A enumerabilidade de Z resulta agora do facto de Y ser um conjunto enumerável e do Exemplo 4, pág. 80, do Manual.

6. O coeficiente de x^n na expansão dada é igual à soma dos coeficientes de x^n no desenvolvimento de cada parcela $x^k(1+x)^{2n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

No caso $k = 0$, resulta da fórmula binomial

$$(1+x)^{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} x^m \tag{1}$$

que o coeficiente de x^n em (1) é igual a

$$\binom{2n}{n}.$$

Nos restantes casos, tem-se, também pela fórmula binomial,

$$(1+x)^{2n-k} = \sum_{m=0}^{2n-k} \binom{2n-k}{m} x^m, \tag{2}$$

donde

$$x^k(1+x)^{2n-k} = \sum_{m=0}^{2n-k} \binom{2n-k}{m} x^{m+k},$$

pelo que o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $x^k(1+x)^{2n-k}$ é igual ao coeficiente de x^{n-k} em (2). Ou seja,

$$\binom{2n-k}{n-k}$$

Deste modo conclui-se que o coeficiente de x^n na expansão

$$(1+x)^{2n} + x(1+x)^{2n-1} + x^2(1+x)^{2n-2} + \ldots + x^n(1+x)^n$$

é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n-k}.$$

Mediante a mudança de variável $m := n-k$ e uma aplicação da fórmula da adição paralela resulta então que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n-k} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n+m}{m} = \binom{2n+1}{n}.$$

7.1. Pela fórmula binomial tem-se

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+(-1)^k)(\sqrt{2})^k. \end{aligned} \tag{3}$$

Relativamente a cada a parcela em (3), note-se que

$$1+(-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ ímpar} \\ 2, & \text{se } k \text{ par} \end{cases},$$

pelo que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+(-1)^k)(\sqrt{2})^k = \underbrace{2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ é par}}}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{(\sqrt{2})^k}_{\in \mathbb{N}}}_{\in \mathbb{N}},$$

o que prova o pretendido.

7.2. Case Base: $\mathbf{n = 0}$. Neste caso tem-se

$$(1+\sqrt{2})^0 - (1-\sqrt{2})^0 = 1 - 1 = 0 = b_0\sqrt{2}, \quad b_0 := 0 \in \mathbb{N},$$

o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Dado $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que

$$(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n = b_n\sqrt{2}$$

para um certo $b_n \in \mathbb{N}$.

Tese de indução: Existe um $b_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1} = b_{n+1}\sqrt{2}.$$

Para se provar a tese de indução note-se que

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1} \\
&= (1+\sqrt{2})^{n}(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})^{n}(1-\sqrt{2}) \\
&= (1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2})^{n} + \sqrt{2}\left((1+\sqrt{2})^{n} + (1-\sqrt{2})^{n}\right),
\end{aligned}$$

onde, pela hipótese de indução,

$$(1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2})^{n} = b_n\sqrt{2}$$

e, pela alínea 7.1,

$$(1+\sqrt{2})^{n} + (1-\sqrt{2})^{n} \in \mathbb{N}.$$

Desde modo, designando por $b_{n+1} := b_n + (1+\sqrt{2})^{n} + (1-\sqrt{2})^{n} \in \mathbb{N}$, obtém-se

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1} = b_{n+1}\sqrt{2}.$$

Pelo método de indução matemática, fica assim provado que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2})^{n} = b_n\sqrt{2}$$

para um certo $b_n \in \mathbb{N}$.

8. Pela fórmula da revisão trinomial tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}^2 \binom{m}{n-k} &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{n}{m}\binom{m}{n-k} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{n}{n-k}\binom{n-(n-k)}{m-(n-k)} \\
&= \binom{n}{n-k}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{k}{m-(n-k)}
\end{aligned}$$

com

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \quad \binom{k}{m-(n-k)} = \binom{k}{n-m},$$

pela lei da simetria. Pela convolução de Vandermonde resulta então que

$$\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{k}{n-m} = \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} = \binom{n}{k}\binom{n+k}{k},$$

onde na última igualdade se utilizou mais uma vez a lei da simetria.