E-folio global de 28/01/2022 - proposta de resolução

1. **[6 val.]** Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real, apresentando o resultado de forma simplificada:

   (a) **[3 val.]** $\cos(2x) + \sin(x)e^{\cos(x)} + 1.$
   Temos

$$\int \left(\cos(2x) + \sin(x)e^{\cos(x)} + 1\right) dx =$$

$$\int \cos(2x)dx + \int \sin(x)e^{\cos(x)}dx + \int 1dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{u'(x)}\cos(\underbrace{2x}_{u(x)})dx - \int (\underbrace{-\sin(x)}_{v'(x)})e^{\overbrace{\cos(x)}^{v(x)}}dx + x =$$

$$\frac{\sin(2x)}{2} - e^{\cos(x)} + x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

   (b) **[3 val.]** $x^2\cos(2x).$
   Fazendo primitivação por partes, temos

$$\int \underbrace{x^2}_{v(x)}\underbrace{\cos(2x)}_{u'(x)}\,dx = \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_{u(x)}\underbrace{x^2}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_{u(x)}\underbrace{2x}_{v'(x)}\,dx =$$

$$\frac{\sin(2x)x^2}{2} - \int \sin(2x)xdx.$$

   Novamente aplicando primitivação por partes, temos que uma primitiva da função $\sin(2x)x$ seria

$$\int \sin(2x)xdx = -\frac{\cos(2x)}{2}x + \int \frac{\cos(2x)}{2}dx =$$

$$-\frac{\cos(2x)x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4},$$

   pelo que uma primitiva da função $x^2\cos(2x)$ seria

$$\int x^2\cos(2x)dx = \frac{\sin(2x)x^2}{2} + \frac{\cos(2x)x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} =$$

$$\frac{\cos(2x)x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}(2x^2 - 1)$$

e, portanto, a família de primitivas seria

$$\int x^2\cos(2x)dx = \frac{\cos(2x)x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}(2x^2-1) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. **[3 val.]** Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2e^{2x} & x < 2 \\ \\ (x-2)^2 + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) & x \geq 2. \end{cases}$$

Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx,$ apresentando o resultado de forma simplificada.

Temos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} f(x)dx = &\int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx = \\
&\int_{-1}^{2} \left(x + 2e^{2x}\right) dx + \int_{2}^{3} \left[(x-2)^2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx = \\
&\left[\frac{x^2}{2} + e^{2x}\right]_{x=-1}^{x=2} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{x=2}^{x=3} = \\
&\frac{2^2}{2} + e^4 - \left(\frac{(-1)^2}{2} + e^{-2}\right) + \frac{(3-2)^3}{3} + \\
&2\sin\left(\frac{3}{2}\right) - \left[\frac{(2-2)^3}{3} + 2\sin\left(\frac{2}{2}\right)\right] = \\
&2 + e^4 - \frac{1}{2} - e^{-2} + \frac{1}{3} + 2\sin\left(\frac{3}{2}\right) - 2\sin(1) = \\
&e^4 - e^{-2} + 2\sin\left(\frac{3}{2}\right) - 2\sin(1) + \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

3. **[3 val.]** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar. Prove que

$$\int_{-b}^{a} f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx.$$

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua no intervalo $[-b, b]$ e, portanto é integrável nesse intervalo. Então temos

$$\int_{-b}^{a} f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx + \int_{-a}^{a} f(x)dx$$

e para se concluir o resultado pretendido falta apenas provar que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Notamos que a função f é ímpar, pelo que

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

e temos

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Fazendo a substituição $t = -x$ no primeiro integral do segundo membro, temos

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt \underbrace{=}_{(1)} -\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Então concluímos que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

e

$$\int_{-b}^{a} f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

como pretendíamos provar.

FIM