UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21082
Matemática Finita

18 de setembro de 2012

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 8 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7 e 8 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

Critérios de avaliação e cotação

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

5.	**6.**	**7.**	**8.**
3	2	5.5	5.5

Nome: ....

N^0 de Estudante: .... **B. I. n^0** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sejam X e Y dois conjuntos tais que $\#(X \cap Y) = 2$. Se $\#X = n$ e $\#Y = m$, então $\#(X \times Y)$ é igual a

- ☐ **a)** $n \times m$
- ☐ **b)** $(n-2) \times (m-2)$
- ☐ **c)** $(n-1) \times (m-1)$
- ☐ **d)** $(n-2) \times (m-2) + 2$

2. Sabendo que se podem formar 10 listas ordenadas (x_1, x_2, x_3), $x_1 < x_2 < x_3$, formadas por 3 números naturais x_1, x_2, x_3 entre 2 e k, conclui-se que

- ☐ **a)** $k = 4$
- ☐ **b)** $k = 5$
- ☐ **c)** $k = 6$
- ☐ **d)** $k = 7$

3. Relativamente à soma

$$\sum_{k=1}^{100} (k^k - k!)$$

pode dizer-se que ...

- ☐ **a)** a soma é um valor não negativo
- ☐ **b)** a soma é um valor não positivo
- ☐ **c)** a soma é um valor estritamente negativo
- ☐ **d)** a soma é um valor estritamente positivo

Nome: ....

N^0 de Estudante: .... B. I. n^0 ....

Turma .... Assinatura do Vigilante: ....

---

4. A soma

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{i}$$

é igual a:

☐ a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n-i}$ ☐ c) $\sum_{i=0}^{n} 2^{n+i}$

☐ b) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\binom{i}{n+i}}$ ☐ d) $\sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n}$

Responda às questões seguintes na folha de ponto

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5.

5.1. Determine, pelo **método telescópico**, o valor da soma

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

5.2. Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$$

6. Mostre, pelo **método da perturbação**, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{1}{3^n}.$$

7. Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas sucessões definidas recursivamente pelo sistema

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 6b_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 1,$$

e pelas condições iniciais $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

7.1. Determine o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$.

7.2. Utilizando o **método de indução matemática**, e **sem determinar** o termo geral da sucessão $\langle b_n \rangle$, mostre que

$$a_n - b_n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.3. **Sem determinar** o termo geral da sucessão $\langle b_n \rangle$, indique o valor da soma

$$\sum_{k=0}^{n} b_k.$$

8. Dado α um número real, sejam $A(t)$ a função geradora da sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por $a_0 = 1$,

$$a_n = 2^\alpha a_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

e $\langle b_n \rangle$ a sucessão definida pela função geradora $A(t)^2$.

8.1. **Sem determinar** o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$, mostre que:

8.1.1. $b_n = 2a_n + 2^{2\alpha} b_{n-2}, \quad n \geq 2;$

8.1.2. $b_n = 2^\alpha b_{n-1} + 2^{2\alpha} b_{n-2} - 2^{3\alpha} b_{n-3}, \quad n \geq 3.$

8.2. Por recurso ao **método das funções geradoras** determine o termo geral da sucessão $\langle b_n \rangle$.

8.3. Utilizando as alíneas anteriores, determine uma forma fechada para a função geradora $A(t)$.

Se necessitar, para qualquer exercício, pode recorrer às seguintes fórmulas gerais:

- $(1 + at)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m}{n} t^n$
- $\frac{1}{(1 - at)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m + n - 1}{n} t^n$

FIM