UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

p-Fólio

U.C. 21037

Elementos de Probabilidades e Estatística

8 de julho de 2016

– INSTRUÇÕES –

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O p-fólio é composto por 3 grupos de questões, distribuídas por 1 página e termina com a palavra FIM. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- É permitido o uso de máquina de calcular. Não é permitido a utilização de elementos de consulta.

– CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO –

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 3 grupos de questões é a seguinte:

Grupo	1	2	3
Cotação	6.0	3.0	3.0

Duração: 1 hora mais 30 minutos de tolerância

1. Na UC Elementos de Probabilidades e Estatística a Professora Teresa e Professora Elsa decidiram fazer um teste formativo de escolha múltipla. Assim, cada questão tem várias respostas possíveis, digamos x, das quais apenas uma está correta. O aluno ou sabe a resposta com probabilidade p, ou não sabe, com probabilidade 1-p. A probabilidade de ele não se enganar a responder quando sabe a resposta é 0.99. Se não sabe a resposta ele escolhe uma qualquer das x respostas possíveis.

1.1 Determine a probabilidade condicional desse aluno saber a resposta a uma dada pergunta, dado que acertou.

1.2 Mostre que essa probabilidade tende para 1 quando $x \to \infty$.

1.3 Admitindo que cada questão tem 5 respostas à escolha e que o aluno domina totalmente 95% da matéria, qual a probabilidade de o aluno responder acertadamente a uma questão escolhida ao acaso?

1.4 As professoras da UC EPE decidiram que era razoável elaborarem um teste com 10 questões. Assim, e tendo em conta as alíneas anteriores, qual a probabilidade de um aluno passar no teste formativo, se apenas pode errar uma questão? E se puder errar 5 questões?

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Acontecimentos:

S – sabe a matéria

C – responde corretamente

$P(S) = p$ e assim, $P(\bar{S}) = 1 - p$

$P(C|S) = 0{,}99$

$P(C|\bar{S}) = \frac{1}{x}$

1.1

$$P(S|C) = = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0.99p}{0.99p + (1-p)\frac{1}{x}}$$

1.2

$$\lim_{x\to+\infty} P(S|C) = \lim_{x\to+\infty} \frac{0.99p}{0.99p+(1-p)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{0.99p}{0.99p+(1-p)\frac{1}{\infty}} = \frac{0.99p}{0.99p+0} = 1$$

1.3

$p = 0{,}95$

$P(C) = p \times 0{,}99 + (1-p) \times \frac{1}{x} = 0{,}95 \times 0{,}99 + 0{,}05 \times \frac{1}{x} = 0{,}9405 + \frac{0{,}05}{x}$

Se $x = 5 \iff P(C) = 0{,}9405 + \frac{0{,}05}{x} = 0{,}9405 + \frac{0{,}05}{5} = 0{,}9505$

1.4

X é a variável aleatória que representa o número de respostas erradas e, segue a distribuição Binomial, tal que:

$$X \sim B(10; 0.0495)$$

Tendo em conta que na alínea anterior foi obtida a probabilidade de um aluno responder acertadamente a uma questão, 0.9505, então a probabilidade de um aluno não responder acertadamente a uma questão será:

$P(\bar{C})$= 1-0.9505= 0.0495 , que vai ser o parâmetro p da Binomial.

P(X=0)= $\binom{10}{0}(0.0495)^0(0.9505)^{10}$= 0.6018

P(X=1)= $\binom{10}{1}(0.0495)^1(0.9505)^9$= 0.3135

O aluno passará à disciplina se errar uma questão ou se não errar nenhuma.

A probabilidade de o aluno passar à disciplina será dada por:

P(X=0)+P(X=1)= 0.9153

Se puder errar no máximo 5 questões, temos que a probabilidade de o aluno passar à disciplina será dada por:

P(X≤ 5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) ≅ 0.9991

2. Seja X uma v.a. uniforme com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\theta_2} & , \quad \theta_1 - \theta_2 < x < \theta_1 + \theta_2 \\ 0 & , \quad \text{outros valores de } x \end{cases}$$

com $\theta_1 \in R \quad e \quad \theta_2 \in R^+$.

2.1 Determine o valor da constante k .

2.2 Determine θ_1 e θ_2 , de modo que P(X<10)=0.30 e P(X≥15)=0.45 .

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

2.1

$$\int_{\theta_1-\theta_2}^{\theta_1+\theta_2} \frac{1}{k\theta_2} dx = \left[\frac{x}{k\theta_2}\right]_{\theta_1-\theta_2}^{\theta_1+\theta_2} = \frac{\theta_1+\theta_2}{k\theta_2} - \frac{\theta_1-\theta_2}{k\theta_2} = \frac{\theta_1+\theta_2-\theta_1+\theta_2}{k\theta_2} = \frac{2\theta_2}{k\theta_2} = \frac{2}{k}$$

Sabemos também que $\int_{\theta_1-\theta_2}^{\theta_1+\theta_2} \frac{1}{k\theta_2} dx = 1$

Sendo assim, tem-se: $\frac{2}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 2$

2.2

$$P(X < 10) = F_X(10) = \int_{-\infty}^{10} f_X(x)dx = 0{,}30 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\theta_1-\theta_2} 0dx + \int_{\theta_1-\theta_2}^{10} \frac{1}{2\theta_2} dx = 0{,}30$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{2\theta_2}\right]_{\theta_1-\theta_2}^{10} = 0{,}30 \Leftrightarrow \frac{10-(\theta_1-\theta_2)}{2\theta_2} = 0{,}30 \Leftrightarrow 10 - \theta_1 + \theta_2 = 0{,}60\theta_2$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = 0{,}40\theta_2 + 10$$

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 0{,}45 \Leftrightarrow P(X < 15) = 0{,}55$$

$$P(X < 15) = F_X(15) = \int_{-\infty}^{15} f_X(x)dx = 0{,}55 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\theta_1-\theta_2} 0dx + \int_{\theta_1-\theta_2}^{15} \frac{1}{2\theta_2} dx = 0{,}55$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{2\theta_2}\right]_{\theta_1-\theta_2}^{15} = 0{,}55 \Leftrightarrow \frac{15-(\theta_1-\theta_2)}{2\theta_2} = 0{,}55 \Leftrightarrow 15-\theta_1+\theta_2 = 1{,}10\theta_2$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = -0{,}10\theta_2 + 15$$

Resolvendo o sistema tem-se:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0{,}40\theta_2 + 10 \\ \theta_1 = -0{,}10\theta_2 + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}10\theta_2 + 15 = 0{,}40\theta_2 + 10 \\ \theta_1 = -0{,}10\theta_2 + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}50\theta_2 = -5 \\ \theta_1 = -0{,}10\theta_2 + 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_2 = 10 \\ \theta_1 = -0{,}10 \times 10 + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_2 = 10 \\ \theta_1 = 14 \end{cases}$$

3. Seja X uma variável aleatória discreta ~~contínua~~ com função ~~densidade~~ de probabilidade:

$$P(X=k) = \begin{cases} \dfrac{6-k}{15} & \text{, para } k=1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{, outros valores de } x \end{cases}$$

3.1 Calcule o valor esperado de X.

3.2 Calcule o valor esperado de Y = X-1

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

x	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E[X] = 1\times\frac{5}{15} + 2\times\frac{4}{15} + 3\times\frac{3}{15} + 4\times\frac{2}{15} + 5\times\frac{1}{15} = \frac{5+8+9+8+5}{15} = \frac{35}{15}$$

$$E[Y] = E[X-1] = E[X] - 1 = \frac{35}{15} - 1 = \frac{20}{15}$$

FIM