Actividade Formativa 1

Enunciado

---

1. Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $(E, \mathcal{E})$, $E \subseteq \mathbb{R}$, um espaço mensurável, seja $X : \Omega \to E$ uma variável aleatória. Mostre que a aplicação P_X definida em $\mathcal{E}$ por

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{E}$$

é uma medida de probabilidade sobre $(E, \mathcal{E})$.

Nota: A medida de probabilidade P_X designa-se em Teoria das Probabilidades por *lei da variável aleatória* X e, mais geralmente, em Teoria da Medida, por *medida imagem de* P *por* X.

2. Seja $\{X_t : t \geq 0\}$ um processo estocástico a tempo contínuo que verifica as duas condições seguintes:

(i) $\{X_t : t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;

(ii) Existem duas constantes $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$, tais que, para cada $0 \leq s < t$, $X_t - X_s$ tem distribuição normal com

$$E[X_t - X_s] = \mu(t-s), \quad E[(X_t - X_s)^2] = \mu^2(t-s)^2 + \sigma^2(t-s).$$

2.1. Mostre que $\{X_t : t \geq 0\}$ tem distribuição normal e incrementos estacionários, mas que não é fortemente estacionário.

2.2. Se $\mu = 0$, então $\{X_t : t \geq 0\}$ é um processo de Wiener.

Nota: Um processo estocástico a tempo contínuo que verifica as condições (i) e (ii) deste enunciado para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ designa-se por *movimento browniano*.

3. Seja $\{X_t : t \geq 0\}$ um movimento browniano. Determine $E[X(t+s)X(t)]$, $t, s \geq 0$.

4. Seja $a > 0$ uma constante. Mostre que se $\{X_t : t \geq 0\}$ é um processo de Wiener, então, para cada $t > 0$, $X(at)$ e $\sqrt{a}X(t)$ têm a mesma distribuição.

Nota: Um processo estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ diz-se *auto-semelhante* se para toda a constante $a > 0$ existe uma constante b tal que, para cada $t > 0$, $X(at)$ e $bX(t)$ têm a mesma distribuição. O que este exercício mostra é que todo o processo de Wiener é auto-semelhante (para $b = \sqrt{a}$).

5. Prove que um processo gaussiano estacionário em média e em covariâncias é fortemente estacionário.