Actividade Formativa 2

Exemplo de resolução

---

1. Para resolver esta questão, comece-se por observar que para qualquer processo $N(t)$ (a tempo contínuo), as propriedades das probabilidades condicionadas e das probabilidades implicam, para quaisquer $t \geq 0$, $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$, as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
& P[N(t+h) - N(t) = k | N(t+h) - N(t) \geq 1] \\
= \; & \frac{P[(N(t+h) - N(t) = k) \cap (N(t+h) - N(t) \geq 1)]}{P[N(t+h) - N(t) \geq 1]} \\
= \; & \frac{P[N(t+h) - N(t) = k]}{1 - P[N(t+h) - N(t) < 1]}.
\end{aligned}$$

Naturalmente que estas igualdades aplicam-se ao caso em que $N(t)$ é um processo de Poisson. Nesta situação, resulta ainda do facto de $N(t)$ ser um processo com valores inteiros e de incrementos independentes (logo $N(0) = 0$) e estacionários (Axiomas A1 e A4) que

$$\frac{P[N(t+h) - N(t) = k]}{1 - P[N(t+h) - N(t) < 1]} = \frac{P[N(h) = k]}{1 - P[N(h) = 0]}.$$

Ou seja, supondo que $N(t)$ é um processo de Poisson de intensidade $\nu > 0$,

$$\lim_{h \to 0} P[N(t+h) - N(t) = k | N(t+h) - N(t) \geq 1] = \lim_{h \to 0} \frac{P[N(h) = k]}{1 - P[N(h) = 0]},$$

com

$$P[N(h) = k] = e^{-\nu h} \frac{(\nu h)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, h > 0.$$

Deste modo, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{P[N(h) = k]}{1 - P[N(h) = 0]} &= \lim_{h \to 0} P[N(h) = k] \cdot \frac{1}{1 - P[N(h) = 0]} \\
&= \lim_{h \to 0} e^{-\nu h} \frac{(\nu h)^k}{k!} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\nu h}} \\
&= \lim_{h \to 0} e^{-\nu h} \frac{(\nu h)^{k-1}}{k!} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 - e^{-\nu h}}{\nu h} \right)^{-1},
\end{aligned}$$

para

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-e^{-\nu h}}{\nu h}\right)^{-1}=1$$

e

$$\lim_{h\to 0} e^{-\nu h}\frac{(\nu h)^{k-1}}{k!}=\begin{cases}1, & \text{se } k=1\\ 0, & \text{se } k\geq 2\end{cases}$$

2. Dados $j,k\in E$ e $m,n\in\mathbb{N}$, considere-se a probabilidade de transição do estado j para o estado k,

$$p_{j,k}(m,n)=P[X_n=k\,|\,X_m=j].$$

2.1. A resolução desta alínea, e da seguinte, faz-se por recurso a propriedades elementares das probabilidades condicionadas, nomeadamente, e para a presente alínea,

$$\sum_{k\in E}p_{j,k}(m,n)=\sum_{k\in E}\frac{P[X_n=k,X_m=j]}{P[X_m=j]},$$

em que o conjunto E é a união disjunta dos conjuntos singulares $\{k\}$, para $k\in E$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in E}P[X_n=k,X_m=j] &= \sum_{k\in E}P[X_n\in\{k\},X_m=j]\\ &= P\left[X_n\in\bigcup_{k\in E}\{k\}=E,X_m=j\right]\\ &= P[X_m=j],\end{aligned}$$

o que permite provar o prentendido.

2.2. Decorre directamente da alínea anterior que

$$P_{j,m,n}(E)=\sum_{k\in E}p_{j,k}(m,n)=1.$$

Os mesmos argumentos utilizados na alínea 2.1 permitem ainda concluir que, dados $A_k\subseteq E$, $k\in\mathbb{N}$, tais que $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$,

$$\begin{aligned}P_{j,m,n}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right) &= P\left[X_n\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\,|\,X_m=j\right]\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}P[X_n\in A_k\,|\,X_m=j]\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}P_{j,m,n}(A_k).\end{aligned}$$

Atendendo a que $P_{j,m,n}(A) \geq 0$ para todo o $A \subseteq E$ (por definição de probabilidade condicionada), podemos então concluir que $P_{j,m,n}$ define uma medida de probabilidade sobre E.

3. Por definição, tem-se

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = X_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} X_i = S_n + X_{n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & P[S_{n+1} = s \,|\, S_0 = s_0, \ldots, S_n = s_n] \\ = \;& P[S_n + X_{n+1} = s \,|\, S_0 = s_0, \ldots, S_n = s_n] \\ = \;& P[X_{n+1} = s - s_n \,|\, S_0 = s_0, \ldots, S_n = s_n]. \end{aligned} \tag{1}$$

Como, por hipótese, as variáveis X_i, $i \in \mathbb{N}$, são independentes, resulta que X_{n+1} é independente de qualquer S_k, $k \leq n$, e, portanto, (1) é igual a

$$P[X_{n+1} = s - s_n].$$

De modo semelhante, os mesmos argumentos permitem concluir que

$$\begin{aligned} P[S_{n+1} = s \,|\, S_n = s_n] &= P[S_n + X_{n+1} = s \,|\, S_n = s_n] \\ &= P[X_{n+1} = s - s_n \,|\, S_n = s_n] \\ &= P[X_{n+1} = s - s_n]. \end{aligned}$$

Como consequência, tem-se

$$\begin{aligned} P[S_{n+1} = s \,|\, S_0 = s_0, \ldots, S_n = s_n] &= P[X_{n+1} = s - s_n] \\ &= P[S_{n+1} = s \,|\, S_n = s_n], \end{aligned}$$

o que prova que o processo $\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ verifica a propriedade de Markov. Sendo o espaço de estados deste processo o conjunto infinito numerável $\mathbb{N}_0$, conclui-se, assim, que $\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ é uma cadeia de Markov.

4. Considerem-se agora as variáveis aleatórias X_i, $i \in \mathbb{N}$, definidas por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se, na semana } i\text{, a pessoa fez compras em A} \\ 0 & \text{se, na semana } i\text{, a pessoa fez compras em B} \end{cases}$$

Observe-se que, sendo igual a probabilidade de uma pessoa fazer compras no supermercado A ou no supermercado B, tem-se

$$P[X_i = 1] = P[X_i = 0] = \frac{1}{2}, \quad i \in \mathbb{N},$$

ou seja, as variáveis aleatórias X_i, $i \in \mathbb{N}$, são identicamente distribuídas. Naturalmente que também são independentes, pois a opção pelo supermercado A ou pelo supermercado B é inteiramente individual.

4.1. Considere-se o passeio aleatório com início em 5,

$$S_0 = 5, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

em que $S_n + S_0 = S_n + 5$ designa o número de vezes que a pessoa fez compras no supermercado A durante n semanas (contadas a partir do início da observação). Face ao enunciado, pretende-se então calcular a probabilidade condicional

$$P[S_n + 5 = j \,|\, S_0 = 5] = P[S_n = j - 5 \,|\, S_0 = 5], \quad 5 \leq j \leq n,$$

a qual é igual a

$$\binom{n}{j-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-(j-5)} = \binom{n}{j-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

4.2. O enunciado desta alínea reporta-se ao passeio aleatório com início em 4,

$$S_0 = 4, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

em que $S_n + S_0 = S_n + 4$ designa novamente o número de vezes que a pessoa fez compras no supermercado A durante n semanas (contadas a partir do início da observação).

Para responder a esta alínea, comece-se por observar que a probabilidade de a pessoa não voltar ao supermercado B decorridas $n \in \mathbb{N}$ semanas contadas a partir do início das observações é igual a

$$P[S_n + 4 = 4 \,|\, S_0 = 4] = P[S_n = 0 \,|\, S_0 = 4].$$

De modo semelhante à alínea anterior, tem-se assim que

$$P[S_n = 0 \,|\, S_0 = 4] = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

pelo que a probabilidade de a pessoa **nunca** mais voltar ao supermercado A é igual a

$$\lim_{n} P[S_n = 0 \,|\, S_0 = 4] = 0.$$

5. A partir da matriz de probabilidade de transição dada, a cadeia de Markov $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ pode ser representada pelo grafo descrito na Figura 1.

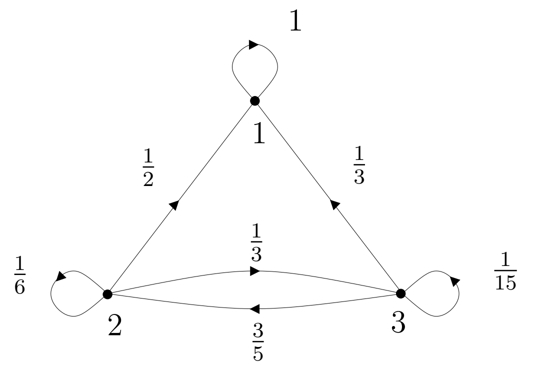

Figura 1: Grafo do Grupo 5

5.1. Quer por análise da matriz de probabilidade de transição, quer por análise do grafo da Figura 1, conclui-se que o estado 2 é acessível a partir do estado 3 em um passo, o estado 3 é acessível a partir do estado 2 em um passo, pelo que os estados 2 e 3 são comunicantes.

Contudo, embora o estado 1 seja acessível em um passo, quer a partir do estado 2, quer a partir do estado 3, os estados 2 e 3 não são acessíveis a partir do estado 1, isto é, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se sempre $p_{1,2}(n) = p_{1,3}(n) = 0$. Logo, o espaço de estado divide-se em duas classes, $\{1\}$ e $\{2,3\}$. Portanto, a cadeia dada é redutível.

Atendendo a que $p_{1,1} = 1$, o estado 1 é absorvente e, portanto, recorrente. Deste modo, a classe $\{1\}$ é recorrente e fechada (Teorema 7 do Capítulo 3).

Quanto à classe $\{2,3\}$, observe-se que

$$f_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{6}, \quad f_{2,2}^{(2)} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5},$$
$$f_{2,2}^{(n)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{15}\right)^{n-2}\frac{3}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{15}\right)^{n-2}, \; n \geq 2,$$

pelo que

$$f_{2,2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2,2}^{(n)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{15}\right)^{n-2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{15}\right)^{n} = \frac{8}{21} < 1.$$

Ou seja, o estado 2 é transitório e, portanto, a classe $\{2,3\}$ é não recorrente (Teorema 6 do Capítulo 3 e Observações 1 e 2 subsequentes).

5.2. Sendo o único estado recorrente o estado 1, este é o único estado a analisar. Por ser um estado absorvente tem-se

$$\mu_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{1,1}^{(n)} = f_{1,1}^{(1)} = 1 < \infty,$$

pelo que 1 é um estado recorrente positivo. Resulta ainda de se ter $p_{1,1} = 1 > 0$ que 1 é um estado aperiódico, o que permite concluir que 1 é um estado ergódico.

Esta alínea prova, em particular, que todo o estado absorvente é ergódico.