

**U.C. 21037**  
**Elementos de Probabilidades e Estatística**

**7 de junho de 2019**

**- INSTRUÇÕES -**

- A prova é composta por 3 grupos de questões e contém 5 página(s). O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta).
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Todas as questões deverão ser **respondidas e justificadas** na folha de ponto, devidamente identificada. Utilize unicamente tinta azul ou preta e uma letra legível.
- É permitido o uso de máquina de calcular não gráfica. Não é permitida a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. No final do enunciado encontra-se um formulário e tabela da função distribuição Normal Reduzida (normal padrão).
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se estas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

**COTAÇÃO E CRITÉRIOS DE CORREÇÃO:**

- Correção científica das respostas; escrita clara e objectiva; estrutura lógica das respostas.
- Apresentação de cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justificação cuidadosa e detalhada de todos os cálculos, raciocínios e afirmações. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- O aluno pode arbitrar um valor adequado da resposta a uma alínea que não tenha respondido, caso este seja necessário para a resolução de uma alínea posterior.
- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos 3 grupos de questões é a seguinte:

Questão	1.1	1.2	1.3.1	1.3.2	1.3.3	1.3.4	1.3.5	2	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
Cotação	1.5	1.75	2	1	1.5	1.25	1.5	3	2	1	1	1	1.5

- 1 Os clientes da Hamburgueria KKBig, apreciam bastante o seu hamburguer KKBig Gourmet. Tendo à sua disposição os seguintes três ingredientes opcionais: molho de iogurte, cogumelos Portobello e lascas de banana da Madeira. Com base nos registos da Hamburgueria sobre os clientes que compram o KKBig Gourmet, sabe-se, que:
- 40%, 25% e 20% dos clientes escolhem molho de iogurte, cogumelos Portobello e lascas de banana da Madeira, respetivamente;
  - 3% escolhem cogumelos Portobello e lascas de banana da madeira;
  - 10% escolhem lascas de banana da madeira e não escolhem molho de iogurte;
  - de entre os que escolhem molho de iogurte, 15% também escolhem cogumelos Portobello;
  - 1% escolhem as três opções.

Dos registos de clientes da Hamburgueria KKBig seleciona-se, aleatoriamente, um cliente do hamburguer KKBig Gourmet.

- 1.1 Qual a probabilidade de o cliente escolher pelo menos um dos ingredientes opcionais?
- 1.2 Mostre que a probabilidade de o cliente escolher apenas dois dos ingredientes é 0.16.
- 1.3 Seja  $X$  a variável aleatória que representa o número de ingredientes opcionais escolhidos pelo cliente.
  - [1.3.1] Determine a função de probabilidade de  $X$ .
  - [1.3.2] Qual o valor esperado de  $X$ ?
  - [1.3.3] Determine a função distribuição de  $X$ .
  - [1.3.4] Determine a probabilidade do cliente ter escolhido os três ingredientes opcionais sabendo que escolheu pelo menos um deles.
  - [1.3.5] Determine a função de probabilidade da variável aleatória  $Y = |X - 2|$ .

- 2 O número de bilhetes de comboio emitidos na estação de São Bento no Porto num dia, é modelado por uma variável aleatória real de média 50 e variância 50. Considerando que a compra de bilhetes se processa de forma independente, determine a probabilidade de, em 32 dias serem emitidos menos de 1679 bilhetes.

- 3 Considere os resultados de um estudo para analisar o número de cafés que cada funcionário de uma multinacional toma por dia, apresentados na tabela seguinte. A tabela resume os resultados da análise a 1000 funcionários numa quarta-feira do mês de novembro.

Número de cafés por funcionário	Frequência absoluta
1	103
2	147
3	248
4	197
5	152
6	100
7	53

- 3.1 Represente estes dados através de um gráfico de barras utilizando frequências relativas.
- 3.2 Determine a média amostral do número de cafés consumidos por funcionário.
- 3.3 Determine a mediana do número de cafés consumidos por funcionário.
- 3.4 Determine a moda do número de cafés consumidos por funcionário.
- 3.5 Determine a amplitude interquartil do número de cafés consumidos por funcionário.

## FORMULÁRIO

### Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se } P(B) > 0$$

### Teorema de Bayes

Se  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  é uma partição de  $\Omega$  (espaço de resultados), então,  $\forall B$  para o qual  $P(B) > 0$ , ter-se-á:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j)P(B|A_j)}$$

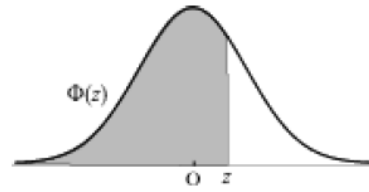
### Tabela de Distribuições

	$P(X = k)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
<i>Unif</i> ( $n$ )	$\frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
<i>Bin</i> ( $n, p$ )	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$	$np$	$np(1-p)$
<i>G</i> ( $p$ )	$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
<i>H</i> ( $N, M, n$ )	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(M, n)$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
<i>P</i> ( $\lambda$ )	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$	$\lambda$	$\lambda$
<i>U</i> ( $a, b$ )	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
<i>Exp</i> ( $\lambda$ )	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Note que:  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

$\varepsilon$	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
$z_\varepsilon$	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

$$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon ; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon .$$