ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA | 21037

Período de Realização

Decorreu no dia 9 de junho de 2021

Proposta de Resolução

1.

1.1 Média:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(25% cotação)
Orquídeas Abelha ($n = 29$): $\bar{x} = 344.07$
Orquídeas Macaco ($n = 19$): $\bar{x} = 292.32$ *(25% cotação)*
Desvio padrão amostral:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

(25% cotação)
Orquídeas Abelha ($n = 29$): $s = 170.56$
Orquídeas Macaco ($n = 19$): $s = 87.76$ *(25% cotação)*

1.2 Orquídeas Abelha $n = 29$, portanto $n = 2k + 1 \Leftrightarrow k = 14$, e a mediana é o valor da 15ª ordem, ou seja 259. *(50% cotação)*
Orquídeas Macaco $n = 19$, portanto $n = 2k + 1 \Leftrightarrow k = 9$, e a mediana é o valor da 10ª ordem, ou seja 265. *(50% cotação)*

2 Seja:

- O_i o evento que o ovo de chocolate i é defeituoso (tem o recheio errado);
- R o evento que o ovo de chocolate foi produzido na fábrica Recheios & Companhia;
- D o evento que o ovo de chocolate foi produzido na fábrica Delicias & Chocolate;

(10% cotação)
Pelo enunciado temos: $P(R) = P(D) = 1/2$, $P(O_i|R) = 0.05$ e $P(O_i|D) = 0.01$. *(10% cotação)*
Pretende-se saber:

$$P(O_2|O_1)$$

(10% cotação)

$$P(O_2|O_1) = \frac{P(O_1O_2)}{P(O_1)} = \frac{P(O_1O_2|R)P(R) + P(O_1O_2|D)P(D)}{P(O_1|R)P(R) + P(O_1|D)P(D)} =$$

(40% cotação)

$$\frac{(0.05)^2(1/2) + (0.01)^2(1/2)}{(0.05)(1/2) + (0.01)(1/2)} = \frac{13}{300} = 0.0433(33)$$

(30% cotação)

3. Seja B a variável aleatória que representa o número de filhos rapazes, e G a variável aleatória que representa o número de filhas raparigas, de uma familia da cidade de Nova York, escolhida ao acaso.

3.1 $P(B = i, G = j)$ com $i = 0, 1, 2, 3$ e $j = 0, 1, 2, 3$.

$$P(B = 0, G = 0) = P(0 \ \ filhos(as)) = 0.15$$

$$P(B = 0, G = 1) = P(1 \ \ rapariga \ \ no \ \ total \ \ de \ \ 1 \ \ filho(a)) =$$

$$= P(1 \ \ filho(a))P(1 \ \ rapariga|1 \ \ filho(a)) = (0.02)(1/2) = 0.1$$

$$P(B = 0, G = 2) = P(2 \ \ raparigas \ \ no \ \ total \ \ de \ \ 2 \ \ filhos(as)) =$$

$$= P(2 \ \ filhos(as))P(2 \ \ raparigas|2 \ \ filhos(as)) = (0.35)(1/2)^2 = 0.0875$$

$$P(B=0,G=3)=P(3\ raparigas\ no\ total\ de\ 3\ filhos(as))=$$

$$=P(3\ filhos(as))P(3\ raparigas|3\ filhos(as))=(0.3)(1/2)^3=0.0375$$

(30% cotação)
Proceguindo de modo idêntico, obtemos a seguinte tabela com a função de probabilidade conjunta de B e G:

$B=i$	$G=j$				$\sum$
	0	1	2	3	$=P(B=i)$
0	0.15	0.10	0.0875	0.0375	0.3750
1	0.1	0.175	0.1125	0	0.3875
2	0.0875	0.1125	0	0	0.2
3	0.0375	0	0	0	0.0375
$\sum=P(G=j)$	0.3750	0.3875	0.2	0.0375	

(70% cotação)

3.2 Pretende-se $P(G\geq 1)$. *(20% cotação)*

$$P(G\geq 1)=1-P(G=0)=1-0.375=0.625$$

(80% cotação)
ou

$$P(G\geq 1)=P(G=1)+P(G=2)+P(G=3)=0.3875+0.2+0.0375=0.625$$

3.3 Note-se que $P(G=1)=0.3875$.
Pretende-se:

$$P(B=0|G=1)=\frac{P(B=0,G=1)}{P(G=1)}=\frac{0.1}{0.3875}=\frac{8}{31}=0.2581$$

(25% cotação)

$$P(B=1|G=1)=\frac{P(B=1,G=1)}{P(G=1)}=\frac{0.175}{0.3875}=\frac{14}{31}=0.4516$$

(25% cotação)

$$P(B=2|G=1)=\frac{P(B=2,G=1)}{P(G=1)}=\frac{0.1125}{0.3875}=\frac{9}{31}=0.2903$$

(25% cotação)

$$P(B=3|G=1)=\frac{P(B=3,G=1)}{P(G=1)}=0$$

(25% cotação)

4.

4.1 X é v.a. tempo após as 7:00:00 em que chega um turista às caves até às 7:30:00, considerando minutos $X \in [0-30]$ e $X \sim Uniforme(0,30)$, então o tempo de espera pela visita também é uma v.a. com distribuição uniforme, sabendo que existem visitas às 7:15:00 e as 7:30:00, no máximo o turista espera 15 minutos.
Y - v.a. tempo em minutos que um turista (que chega entre as 7:00:00 e as 7:30:00) espera pela visita e que existem visitas às 7:15:00 e as 7:30:00. $Y \sim Uniforme(0,15)$. *(20% cotação)*
A f.d.p. de Y é:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{15-0}=\frac{1}{15} & 0\le y\le 15\\ 0 & \ldots\end{cases}$$

(20% cotação)
Pretende-se saber a probabilidade de o turista esperar menos de 5 minutos pela visita:

$$P(Y<5)=P(0\le Y<5)=$$

(30% cotação)

$$=\frac{5-0}{15}=\frac{1}{3}$$

(30% cotação)

Note que a pergunta também poderia ter sido resolvida apartir de X determinando a $P(10<X<15)+P(25<X<30)$.

4.2

$$P(Y\ge 12)=P(12\le Y\le 15)=$$

(50% cotação)

$$=\frac{15-12}{15}=\frac{1}{5}=0,2$$

(50% cotação)
Note que a pergunta também poderia ter sido resolvida apartir de X determinando a $P(0 < X < 3) + P(15 < X < 18)$.

4.3

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 =$$

(20% cotação)

$$= \frac{1}{15}\int_0^{15} y^2\,dy - \left(\frac{1}{15}\int_0^{15} y\,dy\right)^2 =$$

(40% cotação)

$$= \frac{(15-0)^2}{12} = 18,75$$

(40% cotação)
Considerado correto se utilizasse a fórmula da variância de uma distribuição uniforme contínua.

5. Sejam X_1 e X_2 v.a. que representam os totais de precipitação em Faro para os próximos dois anos, respetivamente, ambas com distribuição normal e $E(X_1) = E(X_2) = 12.08$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 3.1$.

5.1 Total da precipitação na cidade de Faro nos próximos 2 anos $=X_1 + X_2$, que também segue uma distribuição normal com $E(X_1+X_2) = 24.16$ e $Var(X_1 + X_2) = 2 \times (3.1)^2 = 19.22$ *(20% cotação)*
Pretende-se:

$$P(X_1 + X_2 > 25)$$

(20% cotação)

$$P(X_1 + X_2 > 25) = P\left(\frac{X_1 + X_2 - 24.16}{\sqrt{19.22}} > \frac{25 - 24.16}{\sqrt{19.22}}\right) =$$

(20% cotação)

$$= P(Z > 0.1916) = 1 - P(Z < 0.1916)$$

(20% cotação)
com $Z \sim N(0,1)$, e pela tabela da distribuição normal reduzida

$$\cong 0.4240$$

Existe uma probabilidade de 42.4% que o total da precipitação na cidade de Faro nos próximos 2 anos exceda 25 *dm*. *(20% cotação)*

5.2 Como $-X_2$ também é uma v.a. com distribuição normal e $E(-X_2) = -12.08$ e $Var(-X_2) = (-1)^2(3.1)^2$, temos que $X_1 - X_2$ segue uma distribuição normal e $E(X_1 - X_2) = 0$ e $Var(X_1 - X_2) = 19.22$. *(20% cotação)*
Pretende-se:

$$P(X_1 > X_2 + 3) = P(X_1 - X_2 > 3) =$$

(20% cotação)

$$= P\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{19.22}} > \frac{3}{\sqrt{19.22}}\right) =$$

(20% cotação)

$$P(Z > 0.6843) = 1 - P(Z < 0.6843)$$

(20% cotação)
com $Z \sim N(0, 1)$, e pela tabela da distribuição normal reduzida

$$\cong 0.2469$$

Existe uma probabilidade de 24.69% que a precipitação do próximo ano exceda a precipitação do ano seguinte por mais de 3 *dm*. *(20% cotação)*

6.

6.1 $X \sim Bin(n, p)$

$$E(X) = np = 7 \quad Var(X) = np(1-p) = 2.1$$

$$\Rightarrow n = 10 \quad p = 0.7$$

(40% cotação)

$$P(X = 4) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 4 \end{array}\right)(0.7)^4(0.3)^6 =$$

(40% cotação)

$$= 0.0368$$

(20% cotação)

6.2 Seria considerado correto se apenas fosse dito que como $n = 10 < 12$ a probabilidade de $X > 12$ é zero, dado que a $P(X \leq 10) = 1$.
(100% cotação)
Resolução alternativa:

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) =$$

(30% cotação)

$$= 1 - \sum_{i=0}^{12} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) (0.7)^i (0.3)^{10-i} =$$

(50% cotação)

$$= 0$$

(20% cotação)

FIM