ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Esta resolução destina-se a verificar a correção do e-fólio. Não se destina a estudo ou revisão (em vez disso, use as resoluções das atividades formativas).
Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos. Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nos e-fólios.

I. (*0,8 val., 0,2 val./questão*) Com justificação, indique se a afirmação é falsa ou verdadeira:

a. Não existe um sistema de equações lineares, com 4 incógnitas, possível e indeterminado com grau de indeterminação 4.

b. Se $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_{n\times(n-1)}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e a matriz ampliada do sistema de equações lineares $AX = b$ é invertével, então o sistema é impossível.

c. Se (S) é um sistema de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ em que o número de equações é superior ao número de incógnitas, então (S) é impossível.

d. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e o sistema $AX = 0_{n\times 1}$ é possível, então A é invertível.

Resolução:

a. FALSO: o sistema $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$ é um exemplo. Cada $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4$ é solução, pois a systema é posível. A matrix do sistema é $A = [0\,0\,0\,0]$ com $r(A) = 0$, pois a grau de indeterminação é $4 - r(A) = 4$.

b. VERDADEIRO: Sejam C o inverso de $[A|b]$ e $X = (x_1, \ldots x_{n-1})^T$ uma solução de $AX = b$. Se $X' = (x_1, \ldots x_{n-1}, -1)^T \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, então $[A|b]X' = 0_{n\times 1}$ (detalhes omitodos). Temos $X' = C[A|b]X' = C0_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$. Mas isto é impossível, porque $X'_n = -1$. Portanto o solução X não existe.

c. FALSO: o sistema $\begin{cases} 1x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$ tem 2 equações, uma incógnita e solução $x = 1$.

d. FALSO. $A = 0_{n\times n}$ é um exemplo. A não é invertível, mas o sistema tem solução $X = 0_{n\times 1}$.

II. (*1,4 val.*)

Considere em $\mathbb{R}$ o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + (\alpha+1)z = 1 \\ x + (\alpha+1)y + z = r_2 \\ (\alpha+1)x + y + z = \alpha + 1. \end{cases} \tag{1}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e r_2 consiste nos 2 últimos dígitos do seu número de estudante (por exemplo, se o seu número de estudante for 2300123, então $r_2 = 23$).

a. (*1,0 val.*) Determine para quais valores de α o sistema (1) não tem solução, tem uma solução única ou tem infinitas soluções.

b. (*0,4 val.*) Determine a solução do sistema se $\alpha = -2$.

Resolução:

a. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \\ \alpha+1 \end{bmatrix},$$

então o sistema tem equação de matrizes $AX = b$ e $[A|b]$ é a matriz ampliada do sistema. Uma matriz equivalente à matriz ampliada é

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & r_2 - 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - 3\alpha & r_2 - 1 \end{array}\right]$$

(cálculos omitodos). Se $\alpha \notin \{0, -3\}$, então $\alpha \neq 0, -\alpha^2 - 3\alpha \neq 0$, e $r(A') = 3$. Neste caso, o sistema tem solução única (para todos r_2).

Se $\alpha = 0$, temos

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 - 1 \end{array}\right].$$

Neste caso, se $r_2 \neq 1$, então $r(A') = 1, r([A'|b']) = 2$, e o sistema não tem solução. Se $r_2 = 1$, então $r(A') = 1 = r([A'|b'])$, e o sistema tem infinitas soluções.

Se $\alpha = -3$, temos

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & r_2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 - 1 \end{array}\right].$$

Neste caso, se $r_2 \neq 1$, então $r(A') = 2, r([A'|b']) = 3$, e o sistema não tem solução. Se $r_2 = 1$, então $r(A') = 2 = r([A'|b'])$, e o sistema tem infinitas soluções.

O sistema nunca tem infinitas soluções (caso $r_2 \neq 1$)/nunca tem zero soluções (caso $r_2 = 1$).

b. A solução é $x = \frac{r_2+1}{2}, y = 0, z = \frac{r_2-1}{2}$ (cálculos omitodos)

III. (*1,2 val.*)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & r' \\ -1 & \alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e r' consiste nos três últimos dígitos do seu número de estudante mais 1 (por exemplo, se o seu número de estudante for 2300123, então $r' = 123 + 1 = 124$).

a. (*0,9 val.*) Determine justificadamente $\det A$ (como aplicação de α)

b. (*0,3 val.*) Usando o resultado de a. determine para que valores de α a matriz A é invertível.

Resolução:

a. Calculemos o determinante da matriz A. Efetuando transformações elementares obtemos

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & r' \\ -1 & \alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix} =_{L_2+L_1, L_4-L_1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & r' \\ 0 & \alpha^2 & 3 & 1+r' \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - r' \end{bmatrix}$$

$$=_{L_2 \leftrightarrow L_3} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & r' \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 3 & 1+r' \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - r' \end{bmatrix} =_{L_3 - \alpha^2 L_2} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & r' \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3+\alpha^2 & 1+r' \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - r' \end{bmatrix}$$

$$= -(\alpha - r')(3 + \alpha^2)$$

$= -\alpha^3 + r'\alpha^2 - 3\alpha + 3r'$

dado este último determinante tratar-se de um determinante de uma matriz triangular e por isso ser o produto dos elementos da diagonal principal.

b. Para que a matriz seja invertível o seu determinante terá de ser não nulo. Portanto A é invertível se e só se $\alpha \neq r'$ ou $3 + \alpha^2 \neq 0$. Porque $\alpha \in \mathbb{R}$, ou segunda caso é sempre verdadeiro. Portanto, A é invertível se e só se $\alpha \neq r'$.

IV. (*0,6 val.*) Seja C uma matriz real quadrada de ordem n e

$$X_k = C^k + C^{k-1} + \cdots + C + I_n,$$

para $k \in \mathbb{N}$. Mostre que:

a. (*0,5 val.*) $X_k - X_k C = I_n - C^{k+1}$, para todo o $k \in \mathbb{N}$.

b. (*0,1 val.*) se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^{k+1} = 0_{n\times n}$, então X_k e $I_n - C$ são matrizes invertíveis.

Resolução:

a. Se substituirmos X_k pela sua expressão dada no enunciado temos

$$\begin{aligned} X_k - X_k C &= (C^k + C^{k-1} + \cdots + C + I_n) - (C^k + C^{k-1} + \cdots + C + I_n)C \\ &= (C^k + C^{k-1} + \cdots + C + I_n) - (C^k C + C^{k-1} C + \cdots + CC + I_n C) \\ &= (C^k + C^{k-1} + \cdots + C + I_n) - (C^{k+1} + C^k + \cdots + C^2 + C) \\ &= -C^{k+1} + C^k - C^k + C^{k-1} - C^{k-1} + \cdots + C - C + I_n \\ &= I_n - C^{k+1} \end{aligned}$$

b. Se $C^{k+1} = 0_{n\times n}$, usando a igualdade da alínea anterior obtemos $X_k - X_k C = I_n$, mas $X_k - X_k C = X_k(I_n - C) = (I_n - C)X_k$, assim podemos concluir que X_k e $I_n - C$ são invertíveis e são a inversa uma da outra.

FIM