Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 30 de abril a 10 de maio de 2021

Data de Limite de Entrega

10 de maio de 2021, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Teoria de Números

Trabalho a desenvolver

Resolução dos 7 grupos de exercícios constantes no enunciado.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
2. Com exceção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
3. Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorreta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**	**6.**	**7.**
0.6 val.	**0.6** val.	**0.6** val.	**1.3** val.

Normas a respeitar

As suas respostas às questões deste E-fólio não devem ultrapassar 6 páginas A4.

Escreva sempre com letra legível.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira e Ana Nunes

Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas.

1. Considere as duas afirmações seguintes:

(i) $\mathrm{mdc}(a,b)\,\mathrm{mmc}(a,b) = ab,\ \ a,b \in \mathbb{Z}^-$

(ii) $\mathrm{mdc}(a,b)\,\mathrm{mmc}(a,b) = |ab|,\ \ a,b \in \mathbb{Z}$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

A) Ambas as afirmações são verdadeiras

B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

D) Ambas as afirmações são falsas

2. Dados $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ considere as duas afirmações seguintes:

(i) $\mathrm{mdc}(a,b) = \mathrm{mdc}(c,d) = 1 \implies \mathrm{mdc}(ac,bd) = \mathrm{mdc}(ad,bc) = 1$

(ii) $\mathrm{mdc}(ac,bd) = 1 \implies \mathrm{mdc}(a,b) = \mathrm{mdc}(c,d) = 1$

Sobre estas afirmações podemos afirmar:

A) Ambas as afirmações são verdadeiras

B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

D) Ambas as afirmações são falsas

3. Dados $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$, considere as duas afirmações seguintes:

(i) $a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n} \implies ad \equiv bc \pmod{n}$

(ii) $a \equiv b \pmod{n} \iff a^m \equiv b^m \pmod{n},\ \forall\, m \in \mathbb{N}$

Relativamente a estas duas afirmações podemos afirmar:

A) Ambas as afirmações são verdadeiras

B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

D) Ambas as afirmações são falsas

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.

4. Dado $p \in \mathbb{N}$, $p > 4$, verifique que se p não for divisível por nenhum número inteiro n tal que $2 \leq n \leq \sqrt{p}$, então p é um número primo.

5. Sejam p um número primo e $m \in \mathbb{Z}$ tais que $p \nmid m$. Mostre que

$$p \mid (m^{p-1} - 1).$$

6. Por recurso ao exercício anterior prove que não existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que 41 seja divisor de $k^5 - 2$.

7. Dado p um número primo, sejam $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que

$$k \equiv m \pmod{p-1}.$$

7.1. Mostre que $u^k \equiv u^m \pmod{p}$ para qualquer $u \in \mathbb{Z}$.

7.2. Dados $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $u \equiv v \pmod{p}$, verifique que

$$u^k \equiv v^m \pmod{p}.$$

FIM